Literatura:

Internet - (Niz realnih brojeva

Oblasti : Nizovi; Redovi; Funkcije jedne realne promjenjive

1. Miličić, Uščumlić Zbirka zadataka iz više matematike I i II knjiga
2. Mesihović Arslanagić Zbirka zadataka iz matematike sa rješenim primjerima
3. Gajić Bivardant i dr. Zbirka zadataka iz više matematike I i II
4. Demidovič Zbirka zadataka (ruska i naša) zadaci rješeni u ...)

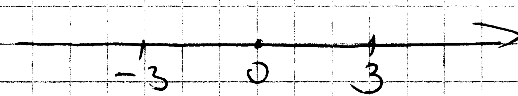
UTORAK
10-13h sutra

APSOLUTNA VRIJEDNOST REALNOG BROJA

Za svako realno x, apsolutno x ili modul x

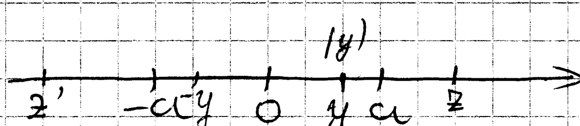
$$x\in\mathbb{R} \Rightarrow |x| = \begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

Apsolutno vrijede pozitivni broj 3 i -3, vrijede 3.
Apsolutna vrijednost jest udaljenost od 0 do 3.
tačke od 0



$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

$|x| > a \Leftrightarrow x > a \lor x < -a$



$|y| < a$

$|z| > a \qquad |z'| > a$

Osobine:

1. Apsolutno x je vrijede jednako $|x| = |-x|$

2. Apsolutno xy je jednako apsolutno $x \cdot y$ $|xy| = |x| \cdot |y|$

3° $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

4° $|x+y| \leq |x| + |y|$

analogno: $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

Apsolutno stavljamo kada nismo sigurni da li je pozitivno ili negativno

NAPOMENA:

$$|x| = \sqrt{x^2} \qquad (x \in R)$$

U skupu realnog brojeva $\sqrt{\ }$ ima uvijek pozitivne vrijednosti

npr: $\sqrt{4} = 2$ u skupu $\mathbb{R}$

$\sqrt{4} = \pm 2$ u skupu C (kompleksnih brojeva)

$$\sqrt{(-2)^2} = 2$$

$$\sqrt{x^2} = x \quad (x \geq 0)$$

$$\sqrt{x^2} = -x \quad (x < 0)$$

podudara se sa apsolutnom vrijednošću

Zadaci sa apsolutnom vrijednošću:

1. Riješiti jednačine i nejednačine:

a) $|2x-1| = -3$ nema rješenja

$$\cancel{2x-1=-3}$$

$$\cancel{2x=-3}$$

Apsolutna vrijednost mora biti ≥ 0

b) $|2x-1| = 3$

$$2x-1 = 3 \quad \vee \quad 2x-1 = -3$$

$$2x = 4 \qquad 2x = -2$$

$$\underline{x_1 = 2} \qquad \underline{x_2 = -1}$$

c) $|2x-1| < 3$

$-3 < 2x-1 < 3$

$-3+1 < 2x < 3+1$

$-2 < 2x < 4 \quad /:2$

$-1 < x < 2$

$x \in (-1, 2)$

d) $|2x-1| > -3$ uvijek tačno

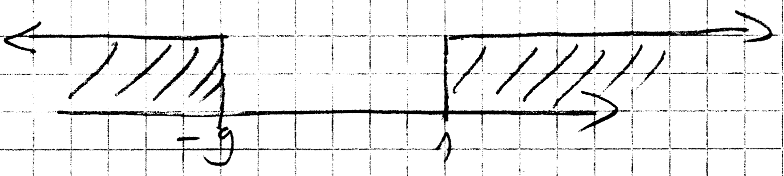
$x \in (-\infty, +\infty)$

e) $|2x-1| < -3$ nema rješenja
rješenje $\emptyset$

f) $|x+4| > 5$

$x+4 > 5 \quad \vee \quad x+4 < -5$

$x > 1 \quad \vee \quad x < -9$



$x \in (-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$

Da bi smo se oslobodili apsolutne vrijednosti treba neka metoda da uporedo prati znak I i II izraza
moraju biti uređeni u nekome od rastućeg

g) $|x+1| - |2x-3| = 2$

	$-\infty$ -1	-1 $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ $+\infty$
$x+1$	$-$	0 $+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	0 $+$

$x+1=0$ $\underline{x=-1}$

$2x-3=0$ $\underline{x=\frac{3}{2}}$

$1^\circ \quad x \in (-\infty, -1]$

$-(x+1) + 2x - 3 = 2$

$-x-1+2x-3=2$

$x = 2+1+3$

$x = 6 \notin (-\infty, -1]$

Ako je izraz negativan oslobađa se tako da mu se promijeni —

$2^\circ \quad x \in \left(-1, \frac{3}{2}\right]$

$x+1+2x-3=2$

$3x = 2-1+3$

$3x = 4$

$x = \frac{4}{3} \in \left(-1, \frac{3}{2}\right]$

rješenje jednačine

$3^\circ \quad x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

$x+1-(2x-3)=2$

$x+1-2x+3=2$

$-x = 2-1-3$

$-x = -2$

$x = 2 \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

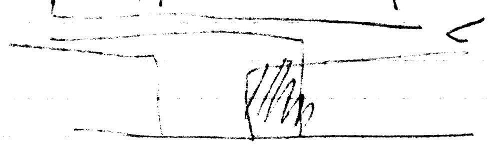
rješenje

Vježba:

h) $|x+1|-|x|+3\cdot|x-1|-2|x-2|=x+2$

i) $|2x-1| \leq 2\cdot|x-1|$

$2x-1$		
$x-1$		



Unija rješenja

1°
2°
3°

h) $|x+1|-|x|+3\cdot|x-1|-2|x-2|=x+2$

$x+1=0$ $x=0$ $x-1=0$ $x-2=0$

$x=-1$ $x=1$ $x=2$

$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$x+1$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$

$x\in\langle-\infty,-1]$

1° $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$

$-(x+1)+x-3\cdot(x-1)+2\cdot(x-2)=x+2$

$\cancel{-x}-1+\cancel{x}-3x+3+2x-4=x+2$

$-3x+2x-x=2+1-3+4$

$-2x=4$

$x=-2\in\langle-\infty,-1]$

rješenje

$2^\circ \quad x \in (-1, 0]$

$$x+1+x-3(x-1)+2(x-2)=x+2$$

$$x+1+x-3x+3+2x-4=x+2$$

$$x+x-3x+2x-x=2-1-3+4$$

$0=2$ nema rješenja

$3^\circ \quad x \in (0, 1]$

$$x+1-x-3(x-1)+2(x-2)=x+2$$

$$\cancel{x}+1-\cancel{x}-3x+3+2x-4=x+2$$

$$-3x+2x-x=2-1-3+4$$

$$-2x=2$$

$$x=-1 \notin (0,1]$$

$4^\circ \quad x \in (1, 2]$

$$x+1-x+3(x-1)+2(x-2)=x+2$$

$$1+3x-3+2x-4=x+2$$

$$3x+2x-x=2-1+3+4$$

$$4x=8$$

$$x=2 \in (1,2]$$

rješenje

$5^\circ \quad x \in (2, +\infty)$

$$\cancel{x}+1-\cancel{x}+3x-3-2x+4=x+2$$

$$3x-2x-x=2-1+3-4$$

$$0=0$$

i) $|2x-1| < 2|x-1|$

	$-\infty$ … $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ … 1	1 … $+\infty$
$2x-1$	$-$ 0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$ 0	$+$

$2x-1=0$
$2x=1$
$x=\frac{1}{2}$

$x-1=0$
$x=1$

1° $x\in(-\infty,\frac{1}{2}]$

$-(2x-1) < -2(x-1)$

$-2x+1 < -2x+2$

$-2x+2x < 2-1$

$0 < 1$

$x\in(-\infty,\frac{1}{2})$

rješenje $x\in(-\infty,\frac{1}{2}]$ cijelo jer je $0<1$

2° $x\in(\frac{1}{2},1]$

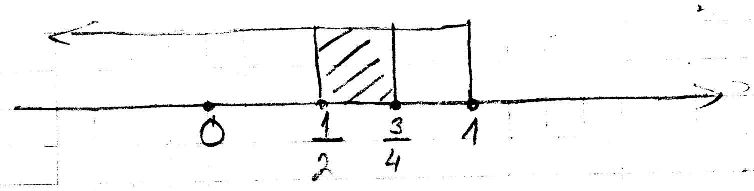
$2x-1 < -2(x-1)$

$2x-1 < -2x+2$

$2x+2x < 2+1$

$4x < 3$

$x < \frac{3}{4} \in(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$



3° $x\in(1,+\infty)$

$2x-1 < 2(x-1)$

$2x-1 < 2x-2$

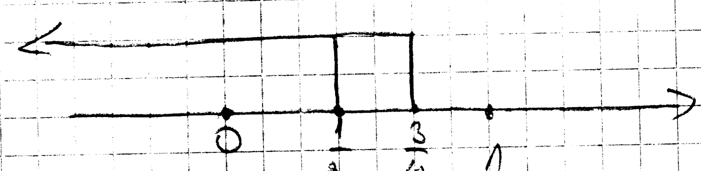
$2x-2x < -2+1$

$0 < -1$

nema rješenja u intervalu od $(1,+\infty)$

Konačno rješenje

$$x\in(-\infty,\frac{1}{2}]\cup(\frac{1}{2},\frac{3}{4})=(-\infty,\frac{3}{4})$$



Za vježbu:

j) $\left|x^2 - x\right| - |x| < 1$

ℓ) $\left|\frac{5x+2}{2x-3}\right| \geq 3$ $\quad -\infty$

c) $\left|\frac{x+4}{3x+2}\right| > \frac{1}{x}$

2. Nacrtati grafik funkcije

[illegible]

a) $y = \log x$

b) $y = -\log x$

[illegible]

c) $y = |\log x|$

$-\infty, -1$

d) $y = |x-1|$

e) $y = |x| + |x+1|$

f) $y = \frac{|x-1| + |x| + |x+1|}{2}$

f)

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x-1$					
x					
$x+1$					

g) $y = |x^2 - 5x + 6|$

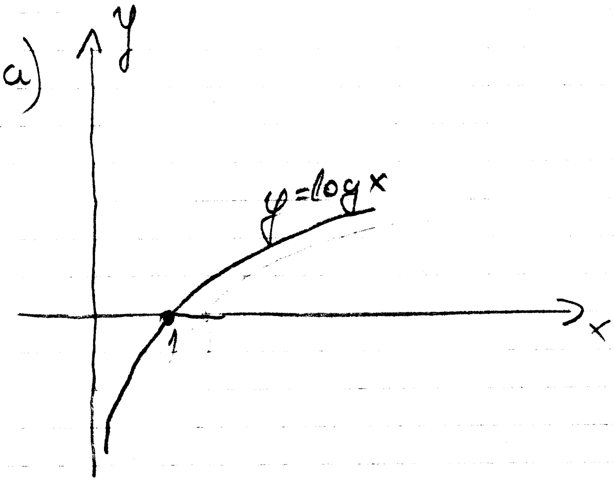
h) $y = |\sin x|$

$y = |\cos x|$

$y = |\operatorname{tg} x|$

$y = |\operatorname{ctg} x|$

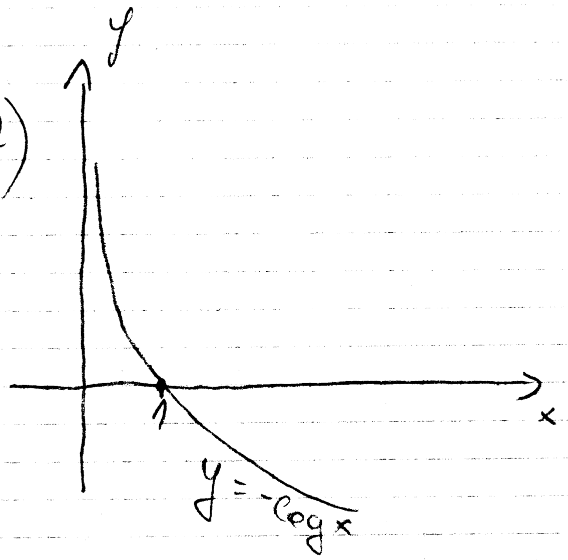
a)



X - gore

- x = zamjena

b)



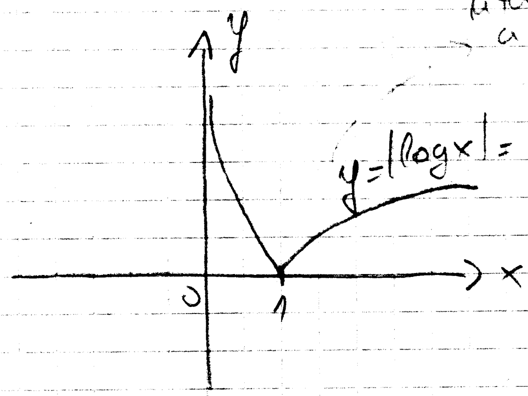
simetrično preslikavanje (-x) x

c)

uzeli dio x gdje log pozitivan

→ a dio gdje log negativan

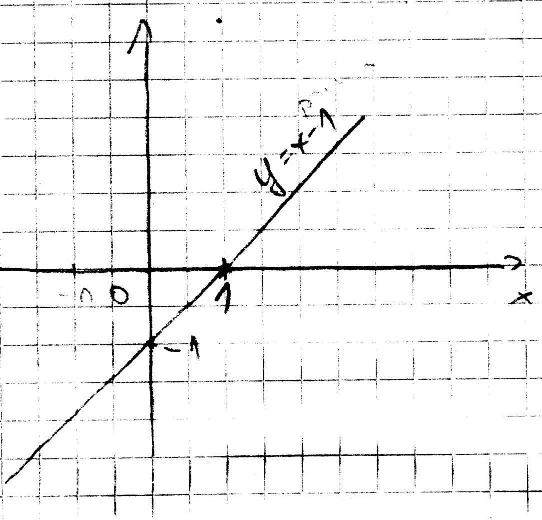
$$y = |\log x| = \begin{cases} \log x, & \log x \geq 0 \iff x \geq 1 \\ -\log x, & \log x < 0 \iff x < 1 \end{cases}$$



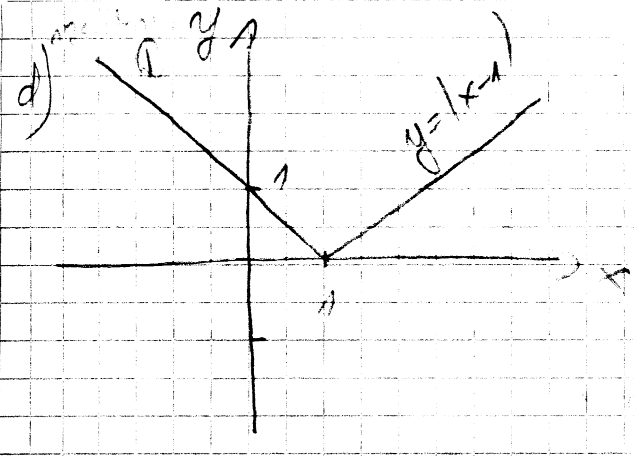
$y = |x-1|$

x	0	1
x - 1	-1	0

d)



d)



e)

	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	$-$	$-$	$0\ +$	
$x+1$	$-\ 0\ +$		$+$	

$1^\circ\ x \in (-\infty, -1]$

$y = -x-(x+1)$

$y = -x-x-1$

$y = -2x-1$

$2^\circ\ x \in (-1, 0]$

$y = -\cancel{x}+\cancel{x}+1$

$y = 1$

$3^\circ\ x \in (0, +\infty)$

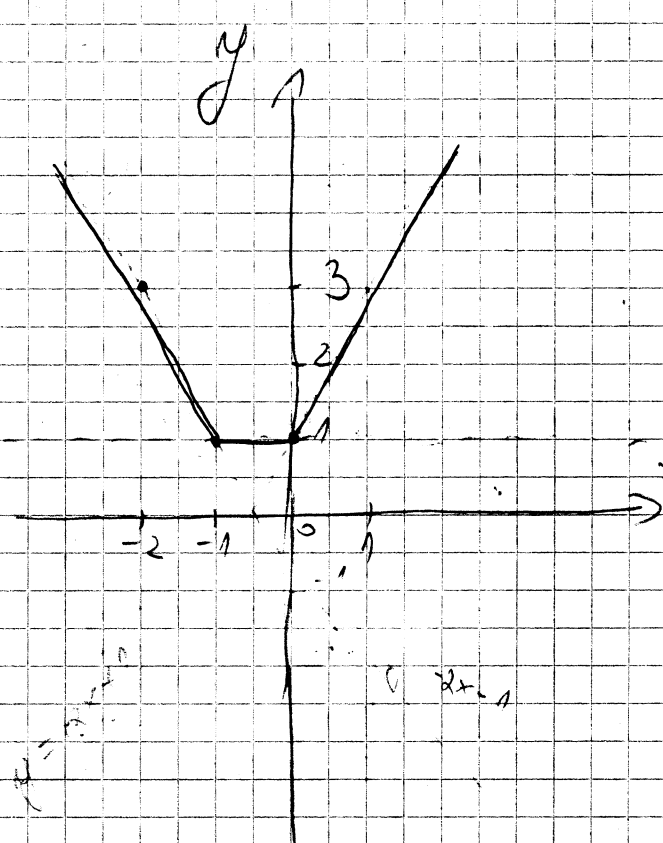
$y = x+x+1$

$y = 2x+1$

$$y = \begin{cases} -2x-1, & x \in (-\infty, -1] \\ 1, & x \in (-1, 0] \\ 2x+1, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

x	-1	-2
$-2x-1$	1	3

x	0	1
$2x+1$	1	3



MATEMATIČKA INDUKCIJA

Da bi dokazali da tvrdnja $T(n)$ vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$ potrebno je:

1° dokazati tačnost tvrdnje za $n=1$ i

2° iz pretpostavke da je tačna tvrdnja $T(k)$, za neki prirodan broj $k>1$ dokazati da je tvrdnja tačna i za $n=k+1$, tj. dokazati implikaciju $T(k) \Rightarrow T(k+1)$

- potpuna i nepotpuna indukcija

indukcija nepotpuna se [illegible] kao [illegible]

1. Dokazati tvrdnje:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} \quad (n \in \mathbb{N})$

- Dokazivanje „nije dokaz" nepotpunom mat. indukcijom

$n=1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} \geq 1 \Longleftrightarrow \geq 1 \quad (\text{tvrdnja } T(1))$$

$n=2$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2}$$

$$\Longleftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow \sqrt{2} \;/\cdot \sqrt{2}$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{2} + 1 \geq 2$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{2} \geq 1 \quad (\text{vrijedi tvrdnja } T(2))$$

$n=3$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \geq \sqrt{3} \;/\cdot \sqrt{6}$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} \geq \sqrt{18}$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} \geq \sqrt{9 \cdot 2}$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{6} + \sqrt{3} \geq 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{6}+\sqrt{3} \geq 2\sqrt{2} \;/^2$

$\Leftrightarrow 6+2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}+3 \geq 4\cdot 2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{18} \geq 8-9$

$\Leftrightarrow 2\cdot 3\sqrt{2} \geq -1$ očito tačno jer je [illegible]

$\Rightarrow$ vrijedi $T(3)$

itd.

[illegible] neposredno zaključivanje [illegible] [illegible]

- <u>Dokazivanje potpunom mat. indukcijom</u>

Dokazati za prvi prirodan broj za koji tvrdnja vrijedi (pri boz[illegible]

1° $n=1$

$\frac{1}{\sqrt{1}} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$

$T(1)$ je tačno!

2° Pretpostavka:

Tačna je tvrdnja $T(k)$ pri čemu je k prirodan broj veći od 1

$T(k)$, $k>1$

tj. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}$

3° Tvrdimo da je tačna i $T(k+1)$ tj:

Prvo napisati tu tvrdnju pa je dokazati

$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1}$

<u>Dokaz:</u>

(P) - pretpostavka

$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}}_{\text{suma prvih } k \text{ članova}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \overset{(P)}{\geq} \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

Tvrdnja će biti dokazana ako dokažemo da je $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1}$

slična metoda u dokazivanju jednakosti 2 kojih uvijek pozitivan

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1} \quad / \cdot \sqrt{k+1}$$

uvijek možemo množiti, dijeliti i ne smijemo [illegible] sa brojem (bez obzira) samo kad prelazak na [illegible] (da li je pozitivan i negativan)

$$\iff \sqrt{k(k+1)}+1 \geq \left(\sqrt{k+1}\right)^2$$

$$\iff \sqrt{k^2+k}+1 \geq k+1$$

$$\iff \sqrt{k^2+k} \geq k \quad /^2$$

$$\iff k^2+k \geq k^2$$

$$\iff k \geq 0 \quad \text{očigledno}$$

je ≥ 1 pa je i od 0

TREBA PISATI:

Pošto smo dokazali da tvrdnja vrijedi za $n=1$ i iz pretpostavke da je tvrdnja tačna za $n=k$ slijedi tačnost tvrdnje i za $n=k+1$, principom potpune mat. indukcije zaključujemo da je tvrdnja tačna za sve prirodne brojeve.

b) zad. sa ispita

uvijek ga zadnji trebati

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Ako je tvrdnja i oni onda je [illegible]

1° $n=1$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \iff 2 > \sqrt{3} \quad /^2$$

$$\iff 4 > 3$$

2° Pretpostavka:

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \quad (k \geq 1 \text{ prirodan broj})$$

Na osnovu [illegible]

3° Tvrdnja vrijedi za $n=k+1$ [illegible].

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} < \frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}}$$ [illegible]

Dokaz:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)} \overset{(p)}{<} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)}$$

Ostaje da se dokaže [illegible] posljedica, [illegible] dokazati

$$\frac{2k+1}{\sqrt{2k+1}\cdot 2(k+1)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \quad \Big/ \cdot \sqrt{(2k+1)(2k+3)}\cdot 2(k+1)$$

tu jednakost treba uprostiti, [illegible]

$$\Longleftrightarrow (2k+1)\cdot\sqrt{2k+3} < \sqrt{2k+1}\cdot 2(k+1) \quad \Big/^{2}$$

$$\Longleftrightarrow (2k+1)^2\cdot 2k+3 < 2k+1\cdot 4\cdot(k+1)^2 \quad \Big/ : (2k+1)$$ [illegible]

$$\Longleftrightarrow (2k+1)\cdot(2k+3) < 4\cdot(k+1)^2$$

$$\Longleftrightarrow 4k^2+6k+2k+3 < 4\cdot(k^2+2k+1)$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{4k^2}+\cancel{8k}+3 < \cancel{4k^2}+\cancel{8k}+4$$

$$\Longleftrightarrow 3 < 4$$ tvrdnja je dokazana

[illegible]

c) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! < (n+1)!$ $(n \in \mathbb{N})$

faktorijel

2

Napomena:

$n! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots n$ $(n \in \mathbb{N})$

1° $n=1$

$1\cdot 1! < 2!$

$1\cdot 1 < 2$

$1 < 2$ (T)

$3!\cdot 4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 4!$

$n!\cdot(n+1) = (n+1)!$

2° Pretpostavka

$n=k$ $k>1$

$1\cdot 1! + 2\cdot 2! \ldots + k\cdot k! < (k+1)!$

3° $n=k+1$

$1\cdot 1! + 2\cdot 2! \ldots + k\cdot k! + (k+1)\cdot(k+1)! < (k+2)!$

Dokaz:

$\underbrace{1\cdot 1! + 2\cdot 2! \ldots + k\cdot k!}_{(k+1)!} + (k+1)\cdot(k+1)! \leq$

$\leq (k+1)! + (k+1)\cdot(k+1)!$

$(k+1)!\,(1+(k+1)) =$

$= (k+1)!\,(k+2)$

$(k+1)!\,(k+2) \leq \underbrace{(k+2)!}_{(k+1)!\,(k+2)}$

tvrdnja ne ne mora mijenjati ako je bilo <, ali ako je ≤ nove

$(k+2) \leq (k+2)$

$1 \leq 1$ (T)

Za vježbu:

d) $2^n \cdot n! < n^n \quad (n \geq 6)$

1° $n=6$ - dokazi

e) $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n} \quad (n \geq 3)$

f) $\sqrt{a^2+\sqrt{a^2+\dots+\sqrt{a^2}}} < |a|+1$, pri čemu na lijevoj strani imamo n korijena, $n \in N$

Uputa za d) BINOMNA FORMULA

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

RAČUNANJE NEKIH FORMULA

Oznake aritmetičkog i geometrijskog niza:

$$\underbrace{a}_{a_1}, \underbrace{a+d}_{a_2}, \underbrace{a+2d}_{a_3}, \dots, \underbrace{a+(n-1)d}_{a_n}, \dots$$

d – razlika niza (koji može biti pozitivan i negativan)

svaki naredni član, ako je $d <$ onda će biti veći

Pr. $2, 5, 8, \dots$

$a=2, \quad d=3$

Suma aritmetičkog niza

$$\boxed{a_1+a_2+\dots+a_n = \frac{\overset{\text{broj sabiraka}}{n}}{2}\underbrace{(a_1+a_n)}_{\text{prvi i zadnji član}}}$$

GEOMETRIJSKI NIZ:

$$\underbrace{a}_{a_1}, \underbrace{aq}_{a_2}, \underbrace{aq^2}_{a_3}, \dots, \underbrace{aq^{n-1}}_{a_n}$$

Svaki naredni član se dobiva množenjem sa prethodnim

q – količnik niza

Primjer: $5, 10, 20, 40, \dots \quad a=5, \ q=2$

Formula:

$$\boxed{a_1+a_2+\dots a_n = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}}$$

Zadaci:

razlika 1

1. Izračunati / sve dvocifrene prirodne brojeve.

$$10+11+12+\dots+99 = \frac{90}{2}(10+99)$$

$$= 45\cdot 109 = 4905$$

$3, 4, 5, \dots, n+5$

ima ih $(n+5)-2 = n+3$

Broj sabiraka ako analiziramo eksponente ima ih kada bi smo izbrojali $3, 4, 5, \dots, n+5$

2. Izračunati

$$\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\dots+\frac{1}{3^{n+5}}$$

$$= \frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\dots+\frac{1}{3^{n+5}} = \frac{1}{3^3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+3}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{27}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^{n+3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3^{n+3}-1}{3^{n+3}}}{18} = \frac{3^{n+3}-1}{18\cdot 3^{n+3}}$$

aritmetički niz, ali drugi način će se pominjati.

3. Izračunati sume

$S_1(n) = 1+2+3+\dots+n$

$S_2(n) = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$

naći $S_3(n) = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$

$S_4(n) = 1^4+2^4+3^4+\dots+n^4, \quad n\in\mathbb{N}$

$+1$

razlika od dvaju kvadrata

$$(x+1)^2 - x^2 = 2x+1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

x^2+2x+1

ne igraju ulogu

$$x=0 \Rightarrow \cancel{1^2} - 0^2 = 2\cdot 0+1$$
$$x=1 \Rightarrow \cancel{2^2} - \cancel{1^2} = 2\cdot 1+1$$
$$x=2 \Rightarrow \cancel{3^2} - \cancel{2^2} = 2\cdot 2+1 \qquad +$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x=n \Rightarrow (n+1)^2 - \cancel{n^2} = 2n+1$$

od jedinice, a ne od nule

$$(n+1)^2 = 2\underbrace{(0+1+2+\ldots+n)}_{S_1(n)} + (n+1)$$

$$(n+1)^2 - (n+1) = 2\cdot S_1(n)$$
$$(n+1)\cdot(n+\cancel{1}-\cancel{1}) = 2\cdot S_1(n)$$

brže pomoću aritmetičkog niza

$$\boxed{S_1(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2+3x+1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$x=0 \Rightarrow \cancel{1^3} - 0^3 = 3\cdot 0^2 + 3\cdot 0+1$$
$$x=1 \Rightarrow \cancel{2^3} - \cancel{1^3} = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1+1$$
$$x=2 \Rightarrow \cancel{3^3} - \cancel{2^3} = 3\cdot 2^3 + 3\cdot 2+1 \qquad +$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x=n \Rightarrow (n+1)^3 - \cancel{n^3} = 3n^2+3n+1$$

$$(n+1)^3 = 3\cdot(0^2+1^2+\ldots+n^2) + 3(0+1+2+\ldots+n) + (n+1)$$
$$(n+1)^3 = 3\cdot S_2(n) + 3\cdot S_1(n) + (n+1)$$
$$(n+1)^3 - (n+1) = 3\cdot S_2(n) + 3\cdot \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$
$$(n+1)\left[(n+1)^2-1\right] - \frac{3n\cdot(n+1)}{2} = 3\cdot S_2(n)$$
$$\frac{2\cdot(n+1)\cdot(n^2+2n+\cancel{1}-\cancel{1}) - 3n\cdot(n+1)}{2} = 3\cdot S_2(n)$$
$$\frac{(n+1)\left[2\cdot(n^2+2n) - 3n\right]}{2} = 3\cdot S_2(n) \quad / \cdot 2$$
$$(n+1)\cdot\left[2n^2+4n-3n\right] = 6\cdot S_2(n)$$

$$S_2(n) = \frac{(n+1)\cdot(2n^2+n)}{6}$$

$$\boxed{S_2(n) = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Paskalov trougao

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \rightarrow (a+b)^2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \rightarrow (a+b)^3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \rightarrow (a+b)^4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \rightarrow (a+b)^5
\end{array}$$

$$(a+b)^2 = \underset{\downarrow\atop 1}{a^2} + \underset{\downarrow\atop 2}{2ab} + \underset{\downarrow\atop 1}{b^2}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

$$(x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1$$

$$x=0 \Rightarrow \cancel{1^4} - 0 = 4\cdot 0^3 + 4\cdot 0 + 1$$

$$x=1 \Rightarrow \cancel{2^4} - \cancel{1^4} = 4\cdot 1^3 + 4\cdot 1 + 1$$

$$x=2 \Rightarrow \cancel{3^4} - \cancel{2^4} = 4\cdot 2^3 + 4\cdot 2 + 1$$

$$\vdots$$

$$x=n \Rightarrow (n+1)^4 - \cancel{n^4} = 4n^3 + 4n + 1$$

$$(n+1)^4 \Rightarrow 4\cdot(0^3+1^3+2^3+\dots+n^3)+4\cdot(0^2+1^2+2^2+\dots+n^2)+$$
$$4\cdot(0+1+2+\dots+n)+(n+1)$$

$$(n+1)^4 \Rightarrow 4\cdot S_3(n)+4\cdot S_2(n)+4\cdot S_1(n)+(n+1)$$
$$(n+1)^4-(n+1) \Rightarrow 4\cdot S_3(n)+4\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+4\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$
$$(n+1)\cdot[(n+1)^3-1] \Rightarrow 4\cdot S_3(n)+\frac{4n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+\frac{4n\cdot(n+1)}{2}$$
$$(n+1)\cdot[n^3+3n^2+3n+\cancel{1}\cancel{-1}]-\frac{4n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+\frac{4n\cdot(n+1)}{2}=4\cdot S_3(n)$$

$$\frac{6\cdot(n+1)\cdot(n^3+3n^2+3n)-4n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)+3\cdot[4n\cdot(n+1)]}{6}=4\cdot S_3(n)$$
$$\frac{(n+1)\cdot[6\cdot(n^3+3n^2+3n)-4n\cdot(2n+1)+12n]}{6}=4\cdot S_3(n)$$
$$\frac{(n+1)\cdot[6n^3+18n^2+18n-\cancel{8n}-\cancel{4n}+\cancel{12n}]}{6}=4\cdot S_3(n)\ /\cdot 6$$

$$(n+1)\cdot[6n(n^2+3n+3)]=24\,S_3(n)$$

$$S_3(n)=\frac{(n+1)\cdot[6n\cdot(n^2+3n+3)]}{24}$$

$$\frac{(n+1)(}{4}$$

OGRANIČENI SKUPOVI

Neprazni skup

$\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

X je ograničen ako postoje brojevi $m, M \in \mathbb{R}$, tako da je svako $m \le x \le M$ $(x \in \mathbb{R}$

U koliko $m \in X \Rightarrow m = \min X$ (minimum)

U koliko $M \in X \Rightarrow M = \max$ (maksimum)

Za broj m - kažemo da je donje ograničenje skupa X

M - gornje ograničenje skupa X

Skup je ograničen, ako je ograničen sa obe strane.

Ako ima 1 donje ograničenje on ih ima sigurno beskonačno

najmanje, najveće donje

mnogo. Ako ima najveće gornje ograničenje

nikada se zna, koji je sredni broj

Pr: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\} = (5, +\infty)$ velika razlika između ova

Ovo nije isto da $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\} = \{6, 7, 8, \dots\}$

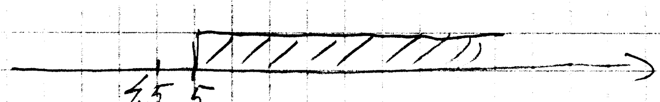
ovo spojiti

U skupovima u kojima ima beskonačno mnogo elemenata, ne znamo sljedeći.

Pr: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\} = (5, +\infty)$

- ograničen sa donje strane, ali nije ograničen (jer kada je ograničen, ograničen je sa obe strane)

Ako pomaknemo donja ograničenja



donja ograničenja: 4,5; 4,57; 4,780261...

Koji je broj najveće donje ograničenje, u 5 je to najveće donje ograničenje

$x=5$ je najveće donje ograničenje (INFIMUM skupa)

$\inf(5, +\infty) = 5$

$\min \langle 5, +\infty)$ ne postoji
(jer ako 5 nije u skupu i ona nije minimum.

$A = [5, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$

$\inf A = 5$

$\min A = 5$ – 5 pripada tom skupu (uglata zagrada)

Ako je skup ograničen odozgo, on ima beskonačno mnogo gornjih ograničenja, a najmanje gornje ograničenje zovemo SUPREMUM skupa, u oznaci $\sup X$ (supremum skupa X)

Ako skup X nije ograničen odozgo tada je $\sup X = +\infty$, a ako X nije ograničen odozdo tada je $\inf X = -\infty$.

Uvijek postoji sup i inf bilo kojeg skupa X koji je podskup skupa realnih brojeva.

Prvo provjeriti je li skup ograničen s gornje, donje strane ima li supremum, infimum, uvijek provjeriti je li skup ima li min, max.

Zadaci

1. Odrediti infimum, supremum, te minimum i maximum sljedećih skupova

$A_1 = \{\frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\}$ – zapisan je opisno

$A_1 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$

$0 < x \leq 1 \quad (x \in A_1)$

ni ni veći od 0

A_1 je ograničen skup

$\inf A_1 = 0$ $\quad \min A_1$ ne postoji – količnik koji teži 0, ali nije u ovom skupu

$\sup A_1 = 1$ $\quad \max A_1 = 1$

$A_2 = [0, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$

Def:

Q - kao količnik dva cijela broja (je racionalan broj)

$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0 \}$ nazivnik ne mije biti 0

$A_2 = \{ x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{3} \}$ bi značilo da je racionalan, ali on nije racionalan

$\inf A_2 = 0$

$\min A_2 = 0$

$\sup A_2 = \sqrt{3}$

$\max A_2 =$ ne postoji jer $\sqrt{3} \notin A_2$ $(\sqrt{3} \notin \mathbb{Q})$

pripada jednom, a ne drugom

Vježba: prvo ono njegovo, a nešto će biti interval) pa onda dalje

$A_3 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 < 0 \}$

$A_4 = \{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{x+3} < 0 \}$ riješiti tabelarno

$A_5 = \{ \cos \frac{\pi n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \}$ najprije odrediti odakle dolazi ovaj razlomak

$A_6 = \{ \sin \frac{4n+3}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \}$

npr.: $B = \{ \frac{\pi n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \}$ $n=1$

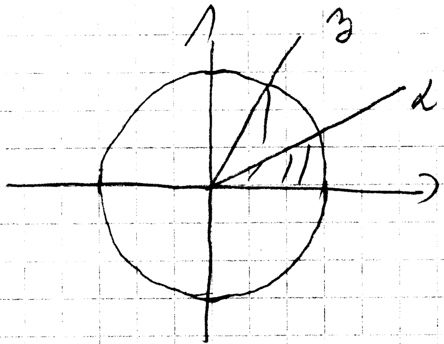
$B = \{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{7}, \frac{4\pi}{9}, \dots \} \subseteq (0, \frac{\pi}{2})$

Očigledno stvari ne treba dokazivati. Da je pozitivan to ne treba dokazivati. Ali da je manje od $\frac{\pi}{2}$ nije očigledno.

Kaže očigledno $\frac{\pi n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} \quad / \cdot 2(2n+1)$

$\Leftrightarrow 2\pi n < \pi(2n+1)$

$\Leftrightarrow 2\pi n < 2\pi n + \pi \quad \Leftrightarrow 0 < \pi$ sigurno tačno



$\alpha < \beta \Rightarrow \cos\alpha > \cos\beta$

veći je cos manjeg ugla, a to je α

Što je ugao veći kosinus je manji

$A_5 = \{\cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{3\pi}{7}, \dots\} \subseteq (0, \frac{\pi}{2})$

odredi sada
$\inf A_5 \quad \frac{1}{2}$
$\min A_5 \quad \frac{1}{2}$
$\sup A_5 \quad 1$
$\max A_5$ ne postoji

$\frac{2\pi}{2n-1} < \frac{\pi}{2}$

N je u pitanju

NIZOVI

Niz se definiše kao preslikavanje ili funkcija iz N u R, tako da se svakom tačke neki prirodan broj.

$a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a(1) = a_1$

$a(2) = a_2$

. . . .

$a(n) = a_n$ – OPĆI ČLAN NIZA

Niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$(a_n)\ n \in \mathbb{N}$

Pr.: $a_n = n^2 + n \quad (n \in \mathbb{N})$

$a_1 = 1^2 + 1 = 2$

$a_3 = 3^2 + 3 = 12$

$a_4 = 4^2 + 4 = 20$

itd.

Osim što niz može biti zadan preko općeg člana, niz se može zadati i REKURZIVNO. U tom načinu zadavanja niza jedan član tog niza je izražen preko nekog drugog člana ili više članova tog niza.

Pr.: $a_1 = 2, \quad \underbrace{a_{n+1} = a_n - 4}_{\text{rekurzivna veza}} \ (n = 1, 2, \dots)$ ne znamo opći član

Pomoću člana a_1 računamo koliko je a_2

dakle i nizovi zadani preko općeg člana, nizovi zadani rekurzivno.

$a_2 = a_1 - 4 = 2 - 4 = -2$

$a_3 = a_2 - 4 = -2 - 4 = -6$

$\vdots$ itd.

Zadaci:

1. Odrediti opći član niza:

$\frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}, \ldots,$ ako dobijamo ovako [illegible] odredili n [illegible]

$\frac{2^2}{5}, \frac{3^2}{10}, \frac{4^2}{17}, \ldots, \frac{n^2}{n^2+1}$ — [illegible] $= \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}$ jer ide od 2

b) $2, 6, 12, 20, \ldots$ 30 $\quad n\cdot(n+1)$

c) $\frac{1}{1}, \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}, \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}, \ldots, \quad \frac{n!}{(2n-1)!!}$

dvo faktorijel $n!!$ – ~~proizvo~~ uzastopni neparni ili parni brojevi

$\boxed{(2n-1)!!} = 1\cdot 3\cdot 5 \cdot\ldots\cdot (2n-1)$ neparni

$\boxed{(2n)!!} = 2\cdot 4\cdot 6 \cdot\ldots\cdot (2n)$ parni

d) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 8n \quad (n \in \mathbb{N})$ — na rekurzivan način

$a_2 = a_1 + 8 = 9$

$a_3 = a_2 + 16 = 25$

$a_4 = a_3 + \overset{24}{8\cdot 3} = 49$

$1, 9, 25, 49, \ldots, \quad a_n = (2n-1)^2$ — kvadrati neparnih brojeva

$2\cdot 1 - 1 = 1$

$2\cdot 2 - 1 = 3^2 = 9$

Dokazat ćemo potpunom matematičkom indukcijom, da je opći član niza $a_n = (2n-1)^2$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

1° $n=1$

$a_1 = (2\cdot 1-1)^2 = 1$

2° pretpostavka

$a_k = (2k-1)^2$

3° tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$, tj.

$a_{k+1} = [2\cdot(k+1)-1]^2 = (2k+1)^2$

Dokaz: iskoristiti rekurzivnu vezu, mora se iskoristiti pretpostavka

$$a_{k+1} = a_k + 8k \overset{(P)}{=} (2k-1)^2 + 8k =$$

$$= 4k^2 - 4k + 1 + 8k$$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= (2k+1)^2$$

dokazali smo i time je dokaz završen.

c) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{2}{3-a_n}$ $(n=1,2,\dots)$

$$a_2 = \frac{2}{3-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$a_3 = \frac{2}{3-\frac{4}{5}} = \frac{2}{\frac{11}{5}} = \frac{10}{11}$$

$$a_4 = \frac{2}{3-\frac{10}{11}} = \frac{2}{\frac{23}{11}} = \frac{22}{23}, \text{ itd.}$$

Za ovaj nekoliko prvih članova pokušati pogoditi opći član, a onda to dokazati metom. indukcijom

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{10}{11}, \frac{22}{23}, \dots$$

Uvijek manji za 1 što omogućuje [illegible]

$2, 5, 11, 23, \ldots \quad 3 \cdot 2^{n-1} - 1$

Pomaknimo početni niz kada mu se član poveća za 1
$+1$

$3, 6, 12, 24, \ldots \quad 3 \cdot 2^{n-1}$

$3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 4, 3 \cdot 8, \ldots \quad / : 3$

$1, 2, 4, 8$ – stepeni broja 2 počevši od 2^0, ali nije na ne

$\longrightarrow 2^{n-1}$

Tvrdimo da je opći član $a_n = \dfrac{3 \cdot 2^{n-1} - 2}{3 \cdot 2^{n-1} - 1} \quad (n \in \mathbb{N})$

i to ćemo dokazati matematičkom indukcijom

$1^\circ \quad n = 1$

$$a_1 = \frac{3 \cdot 2^0 - 2}{3 \cdot 2^0 - 1} = \frac{1}{2}$$ vrijedi za na 1 članu

2° Pretpostavka

$$a_k = \frac{3 \cdot 2^{k-1} - 2}{3 \cdot 2^{k-1} - 1}$$

3° Treba dokazati da je

$$a_{k+1} = \frac{3 \cdot 2^{k+1-1} - 2}{3 \cdot 2^{k+1-1} - 1} = \frac{3 \cdot 2^k - 2}{3 \cdot 2^k - 1}$$

Dokaz:

rekurzivna relacija $\quad \frac{2}{3 - a_n}$

$$a_{k+1} = \frac{2}{3 - a_k} \overset{(P)}{=} \frac{2}{3 - \dfrac{3 \cdot 2^{k-1} - 2}{3 \cdot 2^{k-1} - 1}} =$$

ako pomotim se 2.3, 2.c izgubi tada

$$= \frac{2}{\frac{9\cdot 2^{k-1} - 3 - (3\cdot 2^{k-1} - 2)}{3\cdot 2^{k-1} - 1}} = \frac{2\cdot(3\cdot 2^{k-1} - 1)}{\underbrace{9\cdot 2^{k-1} - 3\cdot 2^{k-1}}_{6} - 3 + 2} =$$

$$= \frac{3\cdot 2\cdot 2^{k-1} - 2}{6\cdot 2^{k-1} - 1} = \frac{3\cdot 2^{k} - 2}{3\cdot 2^{k} - 1}$$

vrijedi

f) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$

vrijedi

2. Dokazati matematičkom indukcijom:

a) ako je niz zadan rekurzivno $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{a_n}{4 + a_n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$

opći član je niza $a_n = \frac{3}{2\cdot 4^{n-1} - 1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$ indukcija (za ispit)

b) ako je niz zadan rekurzivno

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{5a_n}{3 - 7a_n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

dokazati da je opći član niza $a_n = \frac{2\cdot 5^{n-1}}{8\cdot 3^{n-1} - 7\cdot 5^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N})$

[illegible] sada

(3.) Ispitati monotonost, ograničenost i tačke gomilanja niza, izračunati

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$,

$\inf a_n$, $\sup a_n$, ako je

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ c) $a_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$ e) $a_n = n\sin^2\frac{n\pi}{2}$

b) $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n}$ d) $a_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$ ~~$f)a_n$~~ =

za ispitu

f) $1 + (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{2}$

Monotonost - znači da li monotono raste ili opadajući

ako je $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$

- rastući niz, ako je svaki naredni član veći od prethodnog

$a_1 > a_2 > a_3 \ldots > a_n > a_{n+1} >$ - opadajući niz

ako zamijenimo znak $<\ \rightarrow$ „$\leq$" NEOPADAJUĆI

$> \ \leftrightarrow$ „$\geq$" NERASTUĆI

Niz je monoton ako je on rastući ili opadajući, eventualno ako se za njega može reći da je neopadajući ili nerastući.

Pr.

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$: $-\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ NIJE MONOTON

TAČKE GOMILANJA: def: Za realan broj x kažemo da je tačka gomilanja (ili nagomilavanja) niza a_n $n \in N$ ako se u svakoj okolini te tačke nalazi bar jedan član niza.

$x-\varepsilon \quad (\quad x \quad) \quad x+\varepsilon$

OKOLINA TAČKE - otvoren interval u kome leži ta tačka

tzv. LIMES

Neka je S skup tačaka gomilanja niza $\{a_n\}$ $n \in N$

LIMES INFERIOR niza $\{a_n\}$ $n \in N$
donji limes

$\underline{\lim}\, a_n$ računa se na sljedeći način. To je $-\infty$, ako je niz $\{a_n\}$ neograničen odozdo

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\infty, \text{ ako je } \{a_n\} \text{ neograničen odozdo} \\ +\infty, \text{ ako je } \{a_n\} \text{ ograničen odozdo i } S = \emptyset \\ \inf S, \text{ ako je } S \neq \emptyset \end{cases}$$

Ako ima sa jednu tačku uzima se limes gomilanja

LIMES SUPERIOR ili (gornji limes) niza $\{a_n\}$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty, \{a_n\} \text{ neograničen odozgo} \\ -\infty, \{a_n\} \text{ ograničen odozgo i } S = \emptyset \text{ (nema tačaka gomilanja)} \\ \sup S, S \neq \emptyset \text{ (ako skup gomilanja nije prazan)} \end{cases}$$

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{2}{3}$, $a_3 = \dfrac{3}{4}$, ...
$0{,}5$ $\quad 0{,}67$ $\quad 0{,}75$ moguće je da je rastući

Tvrdimo da je niz rastući.
Dokaz: najčešće matematičkom indukcijom, ali ima još metoda, da bi dokazali da je niz rastući treba dokazati

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_n - a_{n+1} < 0$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n\cdot(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

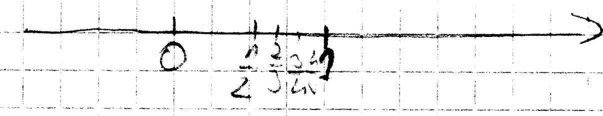
Niz je monoton i niz je rastući.

ograničenost niza

$0 < a_n < 1 \quad (n=1,2,\dots)$ niz je ograničen

$\inf a_n = 0$

$\sup a_n = 1$



Tačka gomilanja je broj 1

konvergentan niz može imati samo 1 tačku niza, onda i to nije uvijek

$S = \{1\}$ - nije prazan. Gdje će jednake inf i sup pa možemo reći da je

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1$$

b) $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n}$

$a_1 = -2$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{2}{3}$, $a_4 = 0, \dots$ niz nije monoton

- niz nije monoton

- Ako je neki k član negativan, jedan od standardnih postupaka je razlaganje niza na podnizove.

RAZDIJANJE (RAZDVAJANJE) niza na podnizove:
posmatramo samo parne članove ako je n

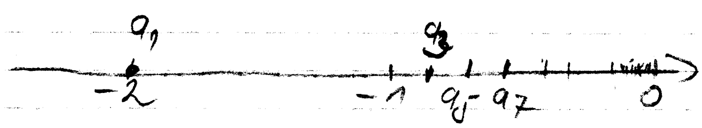
$$\underline{n=2k} \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^{2k}-1}{2k} = \frac{1-1}{2k} = 0$$

$$\underline{n=2k-1} \Rightarrow a_n = \frac{-1-1}{2k-1} = \frac{-2}{2k-1} \quad (k=1,2,\dots)$$

Budući da je pola isto, što smo namjeravali raditi na nizu n, sada radimo to na podnizu. (ovdje imamo 2 podniza)

$$a_{2k-1} = \frac{-2}{2k-1}$$

$$a_1=-2,\quad a_3=-\frac{2}{3},\quad a_5=-\frac{2}{5},\quad a_7=-\frac{2}{7},\dots$$



0 je tačka gomilanja niza. A svaka tačka je ista. Ako dokažemo da je tačka gomilanja 0 za npr. podniz onda je i za niz.
Podniz je monoton, rastući, ali ćemo ga dokazati.
Jako monotonost neće uticati na niz, ali će pomoći da ustanovimo isti tip niza. Ako je rastući, niz će ostati rastući, ako bi niz bio opadajući, prvi bi bio najveći.
Za ovaj podniz uraditi sve što namjeravamo uraditi za niz

$$a_1 \quad a_{2k-1} = -\frac{2}{2k-1}$$

$$a_3 \quad a_{2k+1} = -\frac{2}{2k+1}$$

$$a_{2k-1} < a_{2k+1}$$

$$\iff -\frac{2}{2k-1} < -\frac{2}{2k+1} \quad \Big/ \text{treba dokazati} \quad :(-2)$$

$$\iff \frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2k+1}$$

$$\iff 2k-1 < 2k+1 \ \Big/ -2k \quad \iff -1<1$$

očigledno vrijedi

Dokazali smo da je podniz $\{a_{2k-1}\}_{k\in N}$ je zavući!

$\inf a_{2k-1} = -2$

$\sup a_{2k-1} = 0$

$S = \{0\}$ – tačka gomilanja niza

Pošto je drugi niz trivijalan $(0, 0, 0)$

tačka gomilanja je 0.

Skup tačaka gomilanja podniza i niza je $S\{0\}$.

$\inf a_n = -2$

niz = 2 podniza

——— $\inf_{1\,niz}$

——— $\inf_{2\,niz}$

sledeći koji je manji pa je taj infimum to i infimum niza

$\inf a_{2k} = 0$

$\sup a_{2k} = 0$ uzimamo manji (-2)

Kada se odabire sup, onda se uzima veći sup. i onda je to

sup čitavog niza

Pošto je samo 0 tačka gomilanja

$\overline{\lim} a_n = \underline{\lim}\, a_n = 0$

Mogao bi biti za ispit (sin, cos) -1^n – treba pisati pod nizove po principu parni i neparni brojevi

c) $a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3} \quad (n \in \mathbb{N})$

djeljiv sa 3 — brojevi koji pri djeljenju daju ostatak 1

$n = 3k, \quad 3k+1, \quad 3k+2$ – brojevi koji po djeljenju daju ostatak 2

$1^\circ \quad n = 3k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$

$$a_{3k} = \frac{3k-1}{3k+1} \cos \frac{2 \cdot \cancel{3}k \cdot \pi}{\cancel{3}}$$

$$= \frac{3k-1}{3k+1} \cdot \cos \underbrace{2k\pi}_{1}$$

$$= \frac{3k-1}{3k+1}$$

$k=1$

$k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{5}{7}, \quad \frac{4}{5}, \quad$ niz je rastući

Prema prvih nekoliko članova niz je rastući

$$a_{3k} < a_{3k+1} = a_{3k+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k-1}{3k+1} < \frac{3(k+1)-1}{3(k+1)+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k-1}{3k+1} < \frac{3k+2}{3k+4} \quad / \cdot (3k+1) \cdot (3k+4)$$

$$\Leftrightarrow (3k-1) \cdot (3k+4) < (3k+2)(3k+1)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{9k^2} + 12k - 3k - 4 < \cancel{9k^2} + 3k + 6k + 2$$

$$\Leftrightarrow -4 < 2$$

$\{a_{3k}\}_{k\in N}$ je rastući

$\inf a_{3k} = \frac{1}{2}$

$\sup a_{3k} = 1$

$\frac{1}{2} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{4}{5} \quad 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{3k} = 1$ (jedina tačka gomilanja)

tačka gomilanja je 1

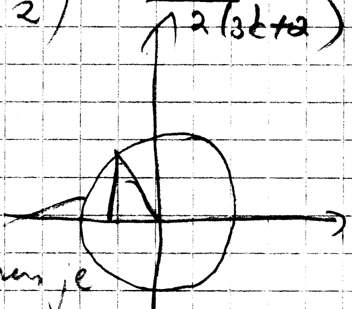
Cijeli podniz je smješten između $\frac{1}{2} \leq a_{3k} < 1$

2° $n = 3k+1$ $\quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

$$a_{3k+1} = \frac{3k+1-1}{3k+1+1} \cdot \cos\frac{2\cdot(3k+1)\pi}{3}$$

$$= \frac{3k}{3k+2}\cos\left(\frac{6k\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3k}{3k+2}\cdot\cos\left(\underbrace{2k\pi}_{\text{period}} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{3k}{3k+2}\cdot\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{3k}{3k+2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-3k}{2(3k+2)}$$



rješenje je

$$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$$

kad imamo period + li - želi [illegible] taj periodne uvijek može zanemariti

Ako limes ima [illegible] to je [illegible] tačka [illegible] a ako ima 2 tačke onda nije limes, nije konvergentan

$$a_{3k+1} = \frac{-3k}{2(3k+2)} \quad / \; k = 0, 1, 2 \ldots$$

ide od 1, onda bi bio izgubljen član
da bi dobio 1, zato ide od 0,
inače bi dobio 4

$k_0 = 0, \quad k_1 = -\frac{3}{10}, \quad k_2 = \frac{-6}{16} = -\frac{3}{8}, \ldots \quad \frac{\cancel{12}}{28}$

niz je padajući <u>dokaži</u>

$$a_{3k+1} > a_{3k+4}$$

$a_{3k+1} > a_{3k+4}$

$-3(k+1)+\ldots$

$\frac{-3k+1}{2(3k+5)}$

$$\Leftrightarrow \frac{-3k}{2(3k+2)} > \frac{-3k+\ldots}{2(3k+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3k}{2\cdot(3k+2)} > \frac{-3(k+1)}{2(3(k+1)+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3k}{2(3k+2)} > \frac{-3k-3}{2(3k+3)+2)}$$

$$\frac{\cancel{-3}k}{\cancel{2}(3k+2)} > \frac{\cancel{-3}(k+1)}{\cancel{2}(3k+5)} = \frac{k}{3k+2} < \frac{(k+1)}{(3k+5)} \quad / \cdot (3k+2)\cdot(3k+5)$$

$$k(3k+5) < (k+1)\cdot(3k+2)$$

$$\cancel{3k^2} + \cancel{5k} < \cancel{3k^2} + \cancel{2k+3k} + 2$$

$$0 < 2$$

m7 opadajući prvi član supremum,
a rastući prvi član infimum.

inf $-\frac{1}{2}$ $\quad S\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

sup 0

$$\frac{-3k}{2\cdot(3k+2)} = \frac{-3k}{6k+4} \quad /:k \quad = \frac{-3}{6+\frac{4}{k}}$$

$$\frac{4}{k} = 0 \qquad \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

niz je opadajući

$\sup a_{3k+1} = 0$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{-3k}{2(3k+2)} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{-3k}{6k} = -\frac{1}{2}$ (on je ujedno i inf, zato što niz opada, ići će prema najmanjim vrijednostima u tom nizu)

Ako promjenjiva ide u beskonačno imamo pravo izlučiti konstantu, je $k \in \mathbb{N}_0$ u ∞

$-\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{8} \quad -\frac{3}{10} \quad 0$

$\inf a_{3k+1} = -\frac{1}{2}$ (jedina tačka gomilanja za podniz)

$3^\circ \; n = 3k+2$

$a_{3k+2} = \frac{3k+1}{3k+3} \cos \frac{2(3k+2)\pi}{3}$

$= \frac{3k+1}{3k+3} \cos\left(\frac{6k\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$

period

$= \frac{3k+1}{3k+3} \cos \frac{4\pi}{3}$

$= \frac{3k+1}{3k+3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3k+1}{2(3k+3)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

kad je bio dobijamo ∞, ...

$\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$ (/-1)

$\frac{1}{6} > -\frac{1}{3}$

$k=0 = -\frac{1}{6}, \; -\frac{4}{26} = -\frac{1}{3}, \; -\frac{7}{18}, \ldots$

niz je opadajući (dokaz) ...

0

$a_{3k+2} > a_{3(k+1)+2}$ $\quad a_{3k+2} > a_{3k+5}$

$$\frac{-3k+1}{2(3k+3)} > \frac{-3(k+1)+1}{2\cdot(3(k+1)+3)}$$

$$\frac{-3k+1}{2(3k+3)} > \frac{-3k-3+1}{2\cdot(3k+6)}$$

$$\frac{-3k+1}{2(3k+3)} > \frac{-3k-2}{2\cdot(3k+6)} \Big/$$

$$\frac{-3k+1}{2(3k+3)} > \frac{-3k-2}{2\cdot(3k+6)} \Big/ \cdot 2(3k+3)(3k+6)$$

$$(-3k+1)\cdot(3k+6) > (-3k-2)\cdot(3k+3)$$

$$\cancel{-9k^2}-\cancel{18k}+\cancel{3k}+6 > \cancel{-9k^2}-\cancel{9k}-\cancel{6k}-6$$

$$6 > -6$$

$$\sup a_{3k+2} = -\frac{1}{6}$$

$$\inf a_{3k+2} = -\frac{1}{2}$$

$$S\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{-3k-1}{6k+6}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{-3k}{6k} = -\frac{1}{2}$$

Skalni podniz povećao ispitati

Ako smo odredili inf podniza onaj od njih najmanji je inf cijelog niza, sup najveći

$$\inf a_n = -\frac{1}{2}$$

$$\sup a_n = 1 \qquad \text{to odreduje ograničenost niza}$$

$-\frac{1}{2} < a_n < 1$ nije potrebno jer ima u svakog člana $-\frac{1}{2}, 1$

$S = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$ skup točaka gomilanja

$$\overline{\lim}\, a_n = 1$$

$$\underline{\lim}\, a_n = -\frac{1}{2}$$

LIMES NIZA

Def: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ako $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})$ tako da je $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

razlika vrlo mala blizu nule

ε-ima jako puno def. i dokaza teorema

najčešće ga koriste kada se hoće označi kao pozitivan broj, ali malo veći od 0. Znači ne nula, nego minimalno veći.

$a_n \approx a$

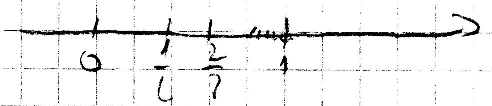
za velike indekse n - što je veći indeks bliži smo limesu.

Pr. $a_n = \frac{1}{n+1}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

$a_3 = \frac{3}{4}$; $\left|\frac{3}{4} - 1\right| = \frac{1}{4}$

$a_{10} = \frac{10}{11}$; $\left|\frac{10}{11} - 1\right| = \frac{1}{10}$ (manji od $\frac{1}{4}$)

Što je veći indeks n član niza je sve bliži tom limesu.



što smo bliže jedinici razlika između članova je manja.

Limesu se može približavati na 2 načina

kada raste sa lijeva na desno

kada opada sa desna na lijevo

konvergentan niz ne mora biti konvergentan, ali je svaki put bliže limesu a

-Kod limesa pazimo kada n teži ∞, uvijek da rezultat bude ∞ samo potpisati + ili -.

-Najveći stepen ima i najjači rast u ∞

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+9n-7) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (2n^2-n^3-5n+11) = \lim\limits_{n\to\infty} (-n^3) = -\infty$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3+2n^2-1}{3n^3+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3}{3n^3} = \dfrac{4}{3}$

dijelimo s polinomom istog stepena, odnosno s najvećim stepenom

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n^2-5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^2} = \dfrac{2}{n} = 0$, kada u brojniku imamo konstantu, a u nazivniku

$\dfrac{c}{\infty} = 0$ (c = constanta)

Ukoliko dobijemo nešto u brojniku ili nazivniku, tada izračunati nemamo pravo.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ suma aritmetičkog niza

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{n^2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n^2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)}{2n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$

za ispit

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\dots+(3n+2)^2}{8n^3-(2n-1)^3} = S_2(n)$

$\boxed{1^2+2^2+\dots+n^2 = \dfrac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}}$ NAPAMET!!!

$1^2+2^2+\dots+(3n+2)^2 = \dfrac{(3n+2)(3n+2+1)\cdot[2\cdot(3n+2)+1]}{6}$

$\lim\limits_{n\to\infty} = \dfrac{\frac{(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot(6n+5)}{6}}{8n^3-(8n^3-3\cdot 4n^2+3\cdot 2n-1)}$ u ovom zadatku sve rješenje

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{3n\cdot 3n\cdot \cancel{6n}}{\cancel{6}}}{\cancel{8n^3}-\cancel{8n^3}+12n^2-6n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9n^3}{12n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{4}$

$\boxed{= +\infty}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n(n+1)}{n^3}$

ako je sabira dva izraza, [illegible] od [illegible], onda rastavljamo na 2 sume

$S(n) = 1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+n(n+1)$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) =$ skraćeno napisano $= \sum\limits_{k=1}^{n} (k^2+k) =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} k =$

$= S_2(n) + S_1(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{6}$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1+3)}{6} = \dfrac{n(n+1)(2n+4)}{6}$

$= \dfrac{\cancel{2}n(n+1)(n+2)}{\cancel{6}} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cdot n\cdot n}{3n^3} = \dfrac{1}{3}$

do ove [illegible] [illegible]

do ovdje - nastavi odavde

Za vježbu:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}\right]$ ✓

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\dots+(n-1)^2}{n^2}$ ✓

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\dots+n(n+1)^2}{1^2\cdot 2+2^2\cdot 3+\dots+n^2(n+1)}$ ✓

Uputa: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(k+1)}$

za ispitu

d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5+9+13+\dots+(8n-3)}{2+5+8+\dots+(6n+11)}$$

→ aritmetički niz, pogledati formulu za sumu aritmetičkog niza

Postupak racionalizacije → pomnožiti [illegible] ovde [illegible] ako ako [illegible]

8.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,(\overset{+\infty}{\sqrt{n+3}} - \overset{+\infty}{\sqrt{n+1}})$$

– ne može se primijeniti postupak izvlačenja konstante zbog minusa (tip: $+\infty - \infty$), može ako je između +, jer kad se $\sqrt{\ }$ s beskonačnosti zbroje je $+\infty$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) \cdot \frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(\sqrt{n+3})^2 - (\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\,(n+3-n-1)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 1$$

odbacimo se pa se mogu skratiti

9.

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\underset{a}{n} - \sqrt[3]{\underbrace{n^3-5n^2+4n+7}_{b}}\Big) \quad (+\infty, +\infty)$$

$$= \big(a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)\big)$$

uradi po ovoj formuli

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n - \sqrt[3]{n^3-5n^2+4n+7}\right)\cdot\left[n^2 + n\cdot\sqrt[3]{n^3} + \left(\sqrt[3]{n^3}\right)^2\right]}{n^2 + n\cdot\sqrt[3]{\ } + \left(\sqrt[3]{\ }\right)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3} - \left(\sqrt[3]{\cancel{n^3}-5n^2+4n+7}\right)^3}{n^2+n\sqrt[3]{\ }+\left(\sqrt[3]{\ }\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-4n-7}{n^2+n\sqrt[3]{\ }+\left(\sqrt[3]{\ }\right)^2}$$

ostavljamo najveći član

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3}+\left(\sqrt[3]{n^3}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{n^2+n^2+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{3n^2} = \frac{5}{3}$$

Za vjezbu: a - b

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}}_{1}\right)$

primijeni razliku kvadrata

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}\right)$ - 2 puta r.k.

c) $\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}\right)$ s. kupita

d) $\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)$ razlika kubova

$$\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$$

(10.) $\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}}_{S(m)}\right)$ svaki rastavi, kao razliku 2 razl.

$$S(m)=\frac{2-1}{1\cdot2}+\frac{3-2}{2\cdot3}+\frac{4-3}{3\cdot4}+\dots+\frac{(m+1)-m}{m(m+1)}$$

$$=\frac{\cancel{2}}{1\cdot\cancel{2}}-\frac{1}{1\cdot2}+\frac{\cancel{3}}{2\cdot\cancel{3}}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot3}+\frac{\cancel{4}}{3\cdot\cancel{4}}-\frac{3}{3\cdot4}+\dots+\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{m}{m(n+1)}$$

$$=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\dots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S(n)=1$$

(11.) $\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}}_{S(n)}\right)$ ostvarit pomoću brojnik bez za 3, a u zagradi ga.

Uputa: $S(n)=\frac{1}{3}\left[\frac{4-1}{1\cdot4}+\frac{7-4}{4\cdot7}+\dots+\frac{(3n+1)-(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)}\right].$

Za vježbu:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\dots+\frac{1}{1+2+\dots+n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}}\right)$ [illegible] u pitaju [illegible] što se očekuje napraviti.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}_{0}\cdot\left(\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{(n-1)^2}+\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{n^2}}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}=0$ racionalizacija

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\underbrace{\ln 2\cdot\ln 4}_{\ln^2 2}}+\frac{1}{\underbrace{\ln 4\cdot\ln 8}_{\ln^3 2}}+\dots+\frac{1}{\ln 2^{n-1}\cdot\ln 2^{n}}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0, & -1<a<1\\ 1, & a=1\\ +\infty, & a>1\end{cases}$$

[illegible]

$\lim\limits_{n\to\infty}a^n$ ne postoji ako je $a\le -1$

[illegible]

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n\ /:3^{n+1}}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}\ /:3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(-2)^n}{3^{n+1}}+\cancel{\frac{3^n}{3^{n+1}}}}{\underbrace{\frac{(-2)^{n+1}}{3^{n+1}}}_{0}+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(-2)^n}{3^n\cdot 3}+\frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{\cancel{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}+1}=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$

[illegible]

Za vježbu:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$, ako je $a^2<b^2<1$

Teorema o lopovom i 2 policajca

Ako je niz $b_n \le a_n \le c_n$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$

Zadaci:

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+2} = 2$

niz koji teži ka 2

$$\underbrace{\sqrt[n]{2^n}}_{2} < \sqrt[n]{2^n+2} < \left(2+\frac{1}{n}\right)^n$$

očigledno

$\Leftrightarrow 2^n+2 < \left(2+\frac{1}{n}\right)^n$ n je prirodan broj pošto su potencije moguće [illegible] pa se [illegible] za [illegible]

$\Leftrightarrow \cancel{2^n}+2 < \cancel{2^n} + \cancel{n}\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{1}{\cancel{n}} + \dots$

2. za uputa jedan od lakših

$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2+n)}{n+1}$

$(-1,1)$ nema neke uloge

Ako pod daje pod cos ili sin ovo zanemariti

$$\frac{-1}{n+1} < \frac{\cos(n^2+n)}{n+1} < \frac{1}{n+1}$$

$\to 0 \leftarrow$

3. $\lim_{n\to\infty} a_n$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

svaka suma se ne može svesti;

IDEJA: uoči koji je najveći, a koji najmanji i za njima svaki razlomak zamijeniti

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

najveći zbog recipročne vrijednosti

najmanji

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < a_n < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2}} = \underline{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{1}$$

5. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$

binomna formula

$$2^n = (1+1)^n = 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} \cdot 1^2 + \dots + 1^n > \binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

kod recipročne vrijednosti i nejednakost

$$\Rightarrow \frac{n}{2^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$$

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$$

$\frac{2}{n-1} \to 0$ teži nuli

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

Za vježbu! Dokažite da je $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$ ako je $a > 1$, pomoću binomne formule.

$$a^n = (\underbrace{a-1}_{>0}+1)^n = \dots$$

binomna formula

$$> \binom{n}{2} \dots$$

3.11.2009.

Teorem: Monoton i ograničen niz je konvergentan.

Ako je niz konvergentan on je ograničen, ali ne mora biti monoton.

Pr. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ nije monoton

$$0 < |a_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$ ne vrijedi obrat teorema

1° Ako je niz rastući dovoljno je dokazati ograničenost odozgo
2° Ako je niz opadajući dovoljno je dokazati da je ograničen odozdo
$\Rightarrow$ da je niz KONVERGENTAN

Prvo provjerimo kakva je monotonost, tako lakše koristiti ovaj teorem.
Monotonost je lakše provjeriti, a najveći problem ograničenosti
otkriti koji je broj ograničen. Ideja koja često upali je
izračunati nekoliko prvih brojeva, pa onda dokazati

npr. 1,22; 1,35; 1,57; ... < 2

1. Dokazati da konvergiraju nizovi:

a) $x_n = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \dots + \frac{1}{n^2+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

b) $y_n = \left(1+\frac{1}{1^2+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)$ $n \in \mathbb{N}$ veća

a) Prvo da li niz raste ili opada

očigledno
pozitivno pa kada
je zbroj mora biti veći
od x_n

$$x_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \dots + \frac{1}{n^2+1}}_{x_n} + \frac{1}{(n+1)^2+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)^2+1} > x_n$$

$\Rightarrow x_{n+1} > x_n$

$\{x_n\}\nearrow$ (niz je rastući)

Procijenit ćemo je ograničen (budući da je rastući)

nazivnik - bismo veće 2

$k^2+1 > k^2-1 \Rightarrow$ za $k \geq 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2-1} \quad (k=2,3,4,\dots,n)$

pri razlomak se prepiše — povećavamo nazivnike

$$x_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \dots + \frac{1}{n^2-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n-1)\cdot(n+1)}$$

razlikujemo za 2

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{3-1}{1\cdot 3} + \frac{4-2}{2\cdot 4} + \frac{5-3}{3\cdot 5} + \dots + \frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)\cdot(n+1)}\right]$$

ostaje nam ovo de $\frac{1}{n}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right]$$

nešto manje jer od nje oduzimamo 2 razlike

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

ne može se izračunati limes

Pošto je niz rastući i ograničen odozgo, on je konvergentan.

- rekurzivno zadani niz se pojavljuje na ispitu

very high turbo extra

2. Dokazati konvergenciju niza i izračunati mu limes

a) $x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \quad (n=1,2,\dots)$ rekurzivno zadani niz

nije dovoljno napisati samo nekoliko opcija, dokazati matematičkom indukcijom

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$$

$$x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$$ ideja je ima! (n korijena!) - to nije bitno za dani zadatak

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

Tvrdimo da je niz RASTUĆI!

To treba dokazati! Ovo je tvrdnja

Dokazat ćemo to matematičkom indukcijom!

$x_n < x_{n+1}$ $(n=1,2,\dots)$

1° $n=1$

$x_1 < x_2$

2° Pretpostavka $x_k < x_{k+1}$ $(k>1)$

3° Tada je $x_{k+1} < x_{k+2}$ — to treba dokazati

ekvivalentno samo pod relevantnim uvjetima

$\iff \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+x_{k+1}} \quad /^2$

$\iff \cancel{2}+x_k < \cancel{2}+x_{k+1}$

$\iff x_k < x_{k+1}$ baš dokazano

Niz je rastući!

da treba da oboje strane, to bi bilo korisjeno, jer je veće od 0

Ako je niz rastući onda treba dokazati da je ograničen s gornje strane

Tvrdimo da je $x_n < 2$ $(n=1,2,\dots)$

Dokaz mat. indukcijom!

1° $n=1$

$x_1 = \sqrt{2} < 2$

2° P: $x_k < 2$ $(k>1)$

3° $x_{k+1} < 2$ (treba dokazati da je $x_{k+1} < 2$)

$x_{k+1} = \sqrt{2+\underset{2}{x_k}} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

Pošto je niz rastući i ograničen odozgo, on je KONVERGENTAN

i postoji ~~limes od x_n~~ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

Označimo ga s x

x_{n-1} x_n $\underline{x_{n+1}}$

i na kraju onda ... x

$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$; $n \to \infty$ imamo pravo kada imamo pos... u kojoj se pojavljuju nizi ...

$\downarrow x \qquad \downarrow x$

ovo ide na danom kraju, ali ovo možno napraviti prije vremena da bi utvrdili koji je njoj osnovni, kao ovdje ② ... na kraju

$x = \sqrt{2+x} \;/^2$

$x^2 = 2+x$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_1 = 2, \; x_2 = -1$

$\boxed{x=2}$

Limes niza mora biti analitički ... , a ... pa je $\lim = 2$

6) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{2+a_n} \quad (n=1,2,\dots)$

$a_1 = 1, \; a_2 = \dfrac{2a_1}{2+a_1} = \dfrac{2}{3}, \; a_3 = \dfrac{2\cdot\frac{2}{3}}{2+\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} = \dfrac{1}{2}, \dots$

Vidimo da je niz opadajući — dokaz ... dugačak, ... lakše ...

$a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{2+a_n} = \dfrac{2a_n+4-4}{2+a_n} = \dfrac{2\cdot(a_n+2)}{2+a_n} - \dfrac{4}{2+a_n} = 2 - \dfrac{4}{2+a_n}$

$a_{n+1} = 2 - \dfrac{4}{2+a_n} \quad (n=1,2,\dots)$

Dokaz: vrijedi $a_n > a_{n+1} \quad (n=1,2,\dots)$

$1^\circ \; n=1$

$a_1 > a_2$ Tačno

2° P. $a_k > a_{k+1}$

$3^\circ \; a_{k+1} > a_{k+2} \iff \cancel{2} - \dfrac{4}{2+a_k} > \cancel{2} - \dfrac{4}{2+a_{k+1}} \;/\cdot(-4)$

$\iff \dfrac{1}{2+a_k} < \dfrac{1}{2+a_{k+1}}$

$\iff \cancel{2}+a_k > \cancel{2}+a_{k+1}$ niz je konvergentan!

$\iff a_k > a_{k+1}$

Očigledno $a_n > 0 \quad (n=1,2,\dots)$ (Dokazati indukcijom za vježbu)

Niz je opadajući i ograničen odozdo pa je konvergentan

Pretpostavimo: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$

Da bi smo ga izračunali

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{2+a_n}, \quad n \to \infty$$

$$a = \frac{2a}{2+a} \Big/ (2+a)$$

$$a\cdot(2+a) = 2a$$

$$\cancel{2a} + a^2 = \cancel{2a}$$

$$a^2 = 0$$

$$\boxed{a=0}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

lim se može dobiti pomoću teorema o [illegible] ali je teško

c) $X_n = \frac{a^n}{n!} \quad (a>1, n=1,2,\dots)$

Kako napraviti rekurzivni oblik jer je lakše

$$X_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n \cdot a}{n!\,(n+1)} = X_n \cdot \frac{a}{n+1}$$

$$X_{n+1} = \frac{a}{n+1} \cdot X_n \quad (n=1,2,\dots)$$

$$X_1 = a$$

Zaključiti da li je mon. rastući, opadajući, kako ga treba ograničiti, [illegible]!!!

d) ~~sa ispita~~

$a_1 = 1, \; a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{11}$

e) $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1+a_n^2\right), \; (n=1,2,\dots) \quad a_1 = 0$ (200?, ispit)

f) $X_0 = \sin 1$

$X_{n+1} = \sin X_n \; (n=0,1,\dots)$ opadajući niz [illegible]

$X_1 = \sin \sin 1$

Broj e

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n\in N)$$

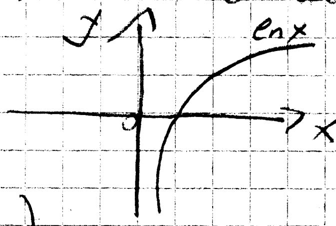
$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n\in N)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = e \approx 2,71$ (ima beskonačno mnogo decimala koje se ne ponavljaju)

$x_n \nearrow, \; y_n \searrow$

Ako niz raste to ... uvijek manji od lim
Ako opada ... niz uvijek veći od lim

$x_n < e < y_n \quad (n=1,2,\dots)$



(1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ redoslijed ostaje ako ...

$\ln x = \log_e x$ (prirodni logaritam) $(x>0)$ mora biti pozitivan

npr $ctg\, x$, ...

log ... ako je ... manja od 1

(1) $\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \ln e < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$\Rightarrow n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (n=1,2,\dots)$

1. Zadatak

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

ima sličnih limesa (1^∞) neodređeni oblik, ... u vezi sa brojem e, ... po ...

Izračunati limese nizova

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{2n+1} = (1^\infty)$

I korak dobiti 1 u ...
II u ... dobiti 1

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2+5}{n-2}\right)^{2n+1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n-2}+\frac{5}{n-2}\right)^{2n+1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{5}}\right)^{2n+1} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{5}}\right)^{\frac{n-2}{5}}\right]^{\frac{2n+1}{\frac{n-2}{5}}} =$$

teži ka e

šta je u zagradi može biti u eksponentu pod uslovom da nije bitno + ili −

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{5(2n+1)}{n-2}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{10n+5}{n-2}}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{n}} = e^{10}$$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^{n+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$

ako jedan manji od 1 na ∞

Treba paziti čim imaš broj, da bi najčešće bio oblik 1^{∞}

Za vježbu:

c) $\lim_{n\to\infty} 2^{2n-1}\cdot\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{2n+2}$ $\quad(\infty\cdot 0)$

Uputa: $\frac{2^{2n+2}}{2^3}\cdot\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{2n+2} = \frac{1}{2^3}\cdot\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{2n+2} = \frac{1}{8}\lim\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot 2n+2}$

URADI

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+4}{n^2-3n+3}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+3+5n+1}{n^2-3n+3}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5n+1}{n^2-3n+3}\right)^{n+2} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-3n+3}{5n+1}}\right)^{\frac{n^2-3n+3}{5n+1}}\right]^{\frac{n+2}{\frac{n^2-3n+3}{5n+1}}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+1)(n+2)}{n^2-3n+3}}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2}{n^2}} = e^5$$

e) $\lim_{n\to\infty} n\left[\ln(n+3)-\ln(n+1)\right]$

f) $\lim_{n\to\infty} n^2\left[\ln(n^2+2)-\ln(n^2+5)\right]$

Napomena: log. količnika = log razlike $\frac{\ln(n+3)}{(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln \lim_{n\to\infty} a_n$$

kada imamo lim ln zamjenimo ih.

(2.) Dokazati tvrdnje:

a) $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n \quad (n\in\mathbb{N}) \quad (*)$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

c) $X_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ je konvergentan

a) dokaz mat. indukcijom

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$$

1° $n=1$

$$\frac{1}{e} < 1 \iff e > 1$$

2° P $\left(\frac{k}{e}\right)^k < k!$

3° Treba dokazati da je $\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} < (k+1)!$

$$\iff \frac{(k+1)^{k+1}}{e^{k+1}} < (k+1)!$$

$$\iff \frac{(k+1)^k\cdot(k+1)}{e^k\cdot e} < k!\,(k+1) \;/ : (k+1)$$

$$\iff \frac{(k+1)^k}{e^k\cdot e} < k!$$

Po ... [illegible] ... k odgovarajući ... Šta ... k ... k

$$f(t) = \frac{t^t}{t^t} \cdot \frac{(t+1)^t}{e^t \cdot e} =$$

raste dijeli s t te

$$= \left(\frac{t}{e}\right)^t \cdot \left(\frac{t+1}{t}\right)^t \cdot \frac{1}{e} \overset{(P)}{<} t!\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \frac{1}{e} < t! \cdot e \cdot \frac{1}{e} = t!$$

Dena ima tu vezu!

b) $(*) \Rightarrow \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^n$ uzimajući recipročne vrijednosti $< \frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{e}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{2}{n}}_{0} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}}_{\to 0 \text{ pa i ono}} < \underbrace{\frac{e}{n}}_{\to 0}$$

Napomena: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a = \text{constant}, a>0)$

SLABO IDE...

c) Korespondira ono da je monotono rastući

$$x_{n+1} = x_n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}_{>1} > x_n$$

Niz raste (direktno se zaključuje) treba dokazati da je ograničeno

$$\boxed{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}}$$ korištenjem jednakost ako je tipično u obliku produkta koji se lakše računa log.

$$\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \text{suma geometrijskog niza}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\cancel{\frac{1}{2}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n} < 1$$

$\ln x_n < 1 = \ln e \Rightarrow x_n < e$ $(n = 1, 2, \dots)$ jer je $\ln$ rastuća funkcija

Zaključak: Niz je konvergentan jer je rastući i ograničen odozgo

(3.) Dokazati da je niz $X_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{n} - \ln n$, konvergentan

Teorem koristiti jer je niz monoton i ograničen, konvergentan je

$$X_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$$

$$\Rightarrow X_{n+1} - X_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \quad / --- = +$$

log količnika

$$= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0 \quad \boxed{\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}} \; (*)$$

kada se log zbraja to je log proizvoda

$X_{n+1} - X_n < 0$

$\Rightarrow X_{n+1} < X_n$

Niz je opadajući!

$$X_n \overset{(*)}{>} \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln n$$

$$= \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \dots + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n =$$

$$= \ln \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} \cdots \frac{n+1}{\cancel{n}} \cdot \frac{1}{n} = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1} > 0$$

Niz je opadajući i ograničen odozdo, pa je on konvergentan.

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \overset{(\mathrm{gr})}{C} \; (\text{Eulerova konstanta}) \quad \underline{C \approx 0{,}577}$$

PPP?!

(4.) Izračunati lim nize: ← vjerojatno ispit

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn}\right)$ k-fiksan prirodni broj

ispit

promatrati niz X_{kn} umjesto X_{2n}

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} - \ln n$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c$$

$$y_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

$$x_{2n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n} - \ln 2n$$

oduzeti pa se ponište neki članovi

$$x_{2n}-x_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}}_{y_n} - \ln 2n + \ln n$$

$$x_{2n}-x_n = y_n + \ln\frac{n}{2n}$$

$$= y_n + \ln\frac{1}{2}$$

Tvrdnja: Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ konvergentan i konvergira na a

tada se $\Rightarrow a_n = a+\varepsilon_n \quad (n=1,2,\dots)$

pri čemu je $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$

Dokaz: Tvrdimo da se svaki konv. niz podrazumijeva 0 niz

razlika a_n i a → 0

$$\varepsilon_n = a_n - a \to 0$$

$$\Rightarrow a_n = a+\varepsilon_n$$

kako trebaju ilustracije

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c \Rightarrow x_n = c+\varepsilon_n, \quad \varepsilon_n\to 0$$

podniz, oduzeti ε_n

$$x_{2n} = c+\varepsilon_{2n}, \quad \varepsilon_{2n}\to 0$$

kada oduzmemo

$$\Rightarrow x_{2n}-x_n = \varepsilon_{2n}-\varepsilon_n \to 0 \quad (n\to\infty)$$

$$x_{2n}-x_n = y_n + \ln\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_{2n}-x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(y_n+\ln\frac{1}{2}\right) = 0$$

pa imamo $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = -\ln\frac{1}{2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \ln 2$

REDOVI

- numerički i funkcionalni.

ili brojni red, beskonačna suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

DIVERGIRA - ako je njegova suma beskonačna i ako red ne teži nuli.

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ red divergira (POTPUNI UVJET)

Redovi u kojima Σ (suma) ne postoji.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1-1+1-1+\dots \quad \text{ne postoji.}$$

Primjer konvergentnog reda je geomet. red.

Geometrijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots$$ može biti konvergentan njegova ako mu je q između $(-1, 1)$

suma je $= \frac{a}{1-q}$, $q \in (-1,1)$

Za zadani mjesoviti red, je ili 1 beskonačan ili ne postoji.

1. Sumiranje reda po definiciji.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (konačno mnogo brojeva, a znamo da je niz)

(1) konvergira, ako konvergira niz $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Red (1) divergira ako divergira niz $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Ako uspješno izračunati limes sume onda je to onda limes (konvergencija reda) svodi se na konvergenciju niza.

Trivijalna situacija dobiti sumu geometrijskog reda (dat će se dolje na ispitu tekst)

Ispitati da li red konvergira po definiciji:

1.

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n-1)} = 1$ prvo treba odrediti S_n

S_n = je suma prvih n članova

$S_n = \frac{1}{2\cdot1} + \frac{1}{3\cdot2} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n-1)} + \frac{1}{(n+1)n}$ pošto od 2 je moraš ići do n+1

$= \frac{2-1}{2\cdot1} + \frac{3-2}{3\cdot2} + \dots + \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} + \frac{(n+1)-n}{(n+1)\cdot n}$

$= \frac{2}{2\cdot1} - \frac{1}{2\cdot1} + \frac{3}{3\cdot2} - \frac{2}{3\cdot2} + \dots + \frac{n}{n\cdot(n-1)} - \frac{n-1}{n(n-1)} + \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{(n+1)n}$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$

Red konvergira

da parujący

2.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+8n+3}$$

$4n^2+8n+3=0$

$\Delta=64-48=16$

$$n_{1,2}=\frac{-8\pm 4}{8}$$

$$n_1=\frac{-1}{2}, \quad \frac{-12}{8}=\frac{-3}{2}$$

$$4n^2+8n+3 \overset{2\cdot 2}{=} 4\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)$$

$$=(2n+1)\cdot(2n+3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}$$

$$S_n=\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{5-3}{3\cdot 5}+\frac{7-5}{5\cdot 7}+\dots+\frac{(2n+3)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{6}$$

Ma konwergencję

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+8n+3}=\frac{1}{6}$$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$

k - prirodan broj, [illegible] od jedan
uvijek će sve [illegible]

$$S_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} \Big/ \cdot k(k+1)(k+2)$$

[illegible] rješavanjem 3 nepoznanice
pomnožit ćemo

$$1 = a(k+1)(k+2) - bk(k+2) + ck(k+1)$$

U ovu jednakost uvrstit ćemo redom $k=1$; $k=2$; $k=0$

$$k=-1 \Rightarrow 1 = b\cdot(-1)\cdot 1$$

$$\boxed{b=-1}$$

$$k=-2 \Rightarrow 1 = c\cdot(-2)\cdot(-1)$$

$$1 = 2c \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{2}}$$

$$k=0 \Rightarrow 1 = a\cdot 1\cdot 2$$

$$\boxed{a=\frac{1}{2}}$$

$$S_m = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2}\right) - \frac{1}{k+1}\right]$$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$ -

dobijemo

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \cancel{\frac{1}{3}}\right) - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{4}}\right) - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{5}}\right) - \cancel{\frac{1}{4}} + \dots$$

$$\cancel{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n+2}\right) - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$$

ovi svi teže nuli

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

– kada je [illegible] 1, za 2, pa ...

$$\begin{cases} S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} \quad / \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \end{cases}$$

Oduzeti se razlomke sa istim nazivnikom

– [illegible]

$$S_n - \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

suma geometrijskog niza

$$\frac{1}{2} S_n = \cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\cancel{1 - \frac{1}{2}}} - \frac{n}{2^{n+1}} \quad / \cdot 2$$

$$S_n = 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - \frac{2n}{2^n \cdot 2}$$

[illegible]

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$ (vrijedi ranije na vježbama)

– što je u intervalu -1, i 1, teži k nuli

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 2$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

kad je $n=1$

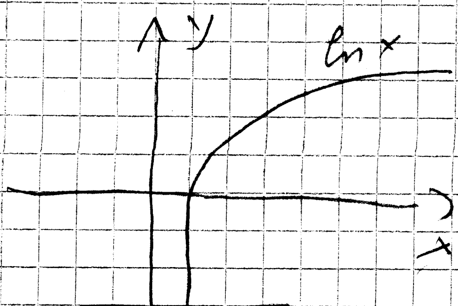
$S_n = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$= \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \ldots + \ln \frac{n+1}{n}$

$= \ln \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cdots \frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}} \cdot \frac{n+1}{\cancel{n}}$

$= \ln (n+1)$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \ln \lim_{n\to\infty}(n+1) = \ln(+\infty) = +\infty$



$\boxed{\ln \infty = \infty}$

Za vježbu:

2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-3}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

2. Pozitivni redovi

- ako su nenegativni

I kriterij poredbe

$0 \leq a_n \leq b_n \quad (n=1,2,\dots)$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira

Ako je red konvergentan, onaj od njega manji i on je konvergentan. Divergentan, od njega veći i on je divergentan.

Primjer: HIPERHARMONIJSKI RED $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$p>1 \Rightarrow$ RED KONVERGIRA

$p \leq 1 \Rightarrow$ RED DIVERGIRA

$p=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - HARMONIJSKI

1. Zadatak: Koristeći kriterij poredbe preko zadatka ispitaj konvergenciju reda:

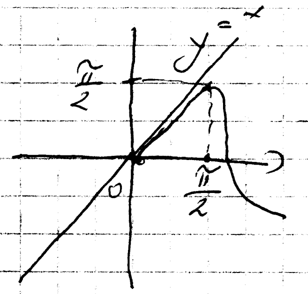
a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ divergira

(nekoliko članova (konačno mnogo) ne utječe na)

$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln n > 1 \Leftrightarrow n > e$

od veći od onaj divergira

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^3}$



$\sin x < x \quad (x>0)$

$n \sin \frac{1}{n^3} < n \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ konvergira

$\Rightarrow$ RED KONVERGIRA

kada je eksponent na n veći od 1 on konvergira

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right), \quad \alpha > 0$ — α positivna konstanta

$1-\cos\frac{\alpha}{n} = 2\sin^2\frac{\frac{\alpha}{2}}{2}$ — ... formula

$= 2\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2n}\right)^2 < 2\cdot\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^2 = 2\cdot\frac{\alpha^2}{4n^2} = \frac{\alpha^2}{2n^2}$

$1-\cos\frac{\alpha}{n} < \frac{\alpha^2}{2n^2}$

$\sum \frac{\alpha^2}{2n^2}$ konvergira jer je hiperharmonijski red s $p>1$

$\Downarrow$

RED KONVERGIRA

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$ KONVERGIRA

Za vježbu:

e) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\frac{1}{3^n}$

f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

DRUGA VARIJANTA POREĐENJA PREKO LIMESA

Teorem: Ako je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l,\ l \neq 0$

nemoje biti ∞, jer je nekonačno

Redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $(a_n \geq 0,\ b_n > 0)$

Istovremeno konvergiraju ili divergiraju.

vijuga

Ako je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Rightarrow a_n \sim b_n \quad (n \to \infty)$

(a_n ASIMPTOTSKI jednako sa b_n)

Ako imamo 2 asimpt. niza onda ih možemo pokratiti, ako u lim trajitu a_n i b_n

(2.) Ispitati konvergenciju reda

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-3}$

imamo samo izostaviti konstante

$\frac{n+2}{n^2-3} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ divergira

Dati red divergira (asimptotski jednak sa harmonijskim)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-4n+6}{\sqrt[5]{n^{17}+2n^9+1}}$

svojstvo nek konstante kresa

$\frac{n^2-4n+6}{\sqrt[5]{n^{17}+2n^9+n}} \sim \frac{n^2}{\sqrt[5]{n^{17}}} = \frac{n^2 /: n^2}{n^{\frac{17}{5}} /: n^2} = \frac{1}{n^{\frac{17}{5}-2}} = \frac{1}{n^{\frac{7}{5}}}$

manji n na nešto

Vodi na hiperharmonijski red

i gledamo eksponent ako je veći od 1 onda red konvergira

$\frac{7}{5} > 1 \Rightarrow$ red konvergira

$\sin x \sim x \quad (x \to 0)$

$\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad (x \to 0)$

$\operatorname{tg} x \sim x \quad (x \to 0)$

$\arcsin x \sim x \quad (x \to 0)$

$\operatorname{arctg} x \sim x \quad (x \to 0)$

$\ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0)$

$e^x \sim x+1 \quad (x \to 0)$

---

može bilo koja od ovih 3 f.

3.

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(e^{\frac{3}{n+2}} - 1\right)}_{a_n} \underbrace{\operatorname{arctg} \frac{\pi}{\sqrt[5]{2n+7}}}_{b_n} \qquad \frac{3}{n+2} \to 0$$

tg, sin, arcsin

$$a_n \sim \frac{3}{n+2} + 1 - 1 = \frac{3}{n+2} \sim \frac{3}{n} \quad (n \to \infty)$$

$$b_n \sim \frac{\pi}{\sqrt[5]{2n+7}} \sim \frac{\pi}{\sqrt[5]{2n}} \quad (n \to \infty)$$

$$a_n b_n \sim \frac{3}{n} \cdot \frac{\pi}{\sqrt[5]{2n}} = \frac{3\pi}{\sqrt[5]{2} \cdot n\sqrt{n}} = \frac{3\pi}{\sqrt[5]{2} \cdot n \cdot n^{1/2}} =$$

$$= \frac{3\pi}{\sqrt[5]{2} \cdot n^{\frac{3}{2}}} \quad \text{konvergentan}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha} \ln \frac{2n+1}{2n-1}}_{a_n}$ kada se pojavljuje α treba diskutovati

$$a_n = \left[(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right]^{\alpha} \cdot \ln \frac{2n-1+2}{2n-1}$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right] \cdot \ln\left(\frac{2n-1}{2n-1}+\frac{2}{2n-1}\right) =$$

$x \to 0$

$$= \left(\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{\alpha} \cdot \ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right) =$$

$$\sim \left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}\right)^{\alpha} \cdot \frac{2}{2n-1} = \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{\alpha} \cdot \frac{2}{2n-1} \sim$$

$$\frac{1}{2^{\alpha} \cdot \sqrt{n^{\alpha}}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n} = \frac{1}{2^{\alpha} \cdot n^{\frac{\alpha}{2}} \cdot n} = \frac{1}{2^{\alpha} \cdot n^{\frac{\alpha}{2}+1}}$$ - dovelli smo do hiperharmonijskog reda

dakle je ostao eksponent

Diskusija:

$$\frac{\alpha}{2}+1>1 \iff \frac{\alpha}{2}>0 \iff \alpha>0$$

1° $\alpha>0 \Rightarrow$ red konvergira

2° $\alpha \leq 0 \Rightarrow$ red divergira

Za vježbu:

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+e^{2n^{-\pi}}-e^{n^{-\pi}}\right)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+3} \arcsin \frac{1}{n^2+2}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt[3]{n^4}}\right)} \cdot \ln \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}-1\right)^{\alpha}$ što nije moguće napisati treba diskusija (diskusija po parametru α)

II D'Alambertov kriterij

Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ~~ukoliko~~ $a_n > 0$ $(n=1,2,\dots)$

računamo $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Tad vrijedi:

1° $q < 1$ red konvergira

2° $q > 1$ red divergira

3° $q = 1$ kriterij ne daje odgovora

(1) Nađi opći član reda

$$\frac{1}{100!} + \frac{1\cdot 11}{101!} + \frac{1\cdot 11\cdot 21}{102!} + \dots$$ ISPITATI da li taj red konvergira

$$a_1 = \frac{1}{\underset{\substack{\downarrow \\ 100+0}}{100!}}, \quad a_2 = \frac{1\cdot 11}{\underset{\substack{\downarrow \\ 100+1}}{101!}}, \quad a_3 = \frac{1\cdot 11\cdot 21}{\underset{\substack{\downarrow \\ 100+2}}{102!}}$$

$$a_n = \frac{1\cdot 11\cdot 21\cdots(10n-9)}{(100+n-1)!} = \frac{1\cdot 11\cdot 21\cdots(10n-9)}{(99+n)!} \quad (n\in\mathbb{N})$$

$\{b_n\}$ - aritmetički niz

$b_1 = 1$, $d = 10$

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + (n-1)d \\ &= 1 + (n-1)\cdot 10 \\ &= 1 + 10n - 10 \\ &= 10n - 9 \end{aligned}$$

koristi ćemo dalamberov kriterij

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 11\cdots(10n-9)\cdot[10(n+1)-9]}{(n+1+99)!}}{\frac{1\cdot 11\cdot 21\cdots(10n-9)}{(n+99)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+99)!\,\cancel{1\cdot 11}\cdots\cancel{(10n-9)}(10n+1)}{(n+100)!\,\cancel{1\cdot 11}\cdots\cancel{(10n-9)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+99)!}\,(10n+1)}{\cancel{(n+99)!}\,(n+100)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{10n}{n} = 10 > 1$$ RED DIVERGIRA

Ako se u općem članu pojavljuju faktorijeli tu je pogodan dalamberov kriterij.
Ako slučajno dobijemo 1 onda pokušamo Raabeovim kriterijem

(2.) Ispitati konvergenciju reda dalamberovim kriterijem

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\cdot n^n}{n!\cdot(n+1)^{n+1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}\cancel{(n+1)}\cdot n^n}{\cancel{n!}\,(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (1^\infty)$$ – kada god imamo dva ... isti eksponent možemo napraviti 1 ... – broj ... koji je e

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{n}{-(n+1)}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{-n}} = e^{-1}$$

$$g = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

RED KONVERGIRA

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{[2\cdot(n+1)-1]!!}{[2\cdot(n+1)]!!\cdot 2^{n+1+1}}}{\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!\cdot(2n)!!\cdot\cancel{2^{n+1}}}{(2n+2)!!\cdot(2n-1)!!\cdot 2^{n+2}}$$

gdje je manji eksponent prekrižimo ga, a gdje veći damo ostatak

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(2n-1)!!}\,(2n+1)\cdot\cancel{(2n)!!}}{\cancel{(2n)!!}\cdot(2n+2)\cdot\cancel{(2n-1)!!}\cdot 2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$ RED KONVERGIRA

Za vježbu:

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}$

e) $\frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \frac{(4!)^2}{2^{16}} + \cdots$

prvo odrediti opći član, pa iskoristiti Dalembertov kriterij

Cauchy (Košijev) korjeni kriterij korištenjem vadi se n-ti korijen ili kada ima zagrada na n

$$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

1° $g<1$ red konvergira

2° $g>1$ red divergira

3° $g=1$ nema odgovora

Ispitati konvergenciju reda:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n^2+n}$

$$g = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n+1} = (1^{\infty})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2-4}{n+2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{n+2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{n+2}{4}}\right)^{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{n+2}{4}}\right)^{-\frac{n+2}{4}}\right]^{\frac{n+1}{-\frac{n+2}{4}}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-4n-4}{n+2}}$$

$$= \cancel{e^{\lim}} = e^{\lim_{n\to\infty} -\frac{4n}{n}} = e^{-4} = \frac{1}{e^4} < 1 \quad \text{RED KONVERGIRA}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$, $a > 0$ $\quad$ a – parametar, treba diskusija

a može biti $0, 1, +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^n}}{a^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n}$$

1° $0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = 0$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

$q > 1$ – red divergira

2° $a = 1 \Rightarrow a^n = 1$ $(n = 1, 2, \dots)$ nastavak bi bile jedinice

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1} = +\infty$$

RED DIVERGIRA

3° $a > 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$ $\quad$ nije očigledno, ali izračunati u teoremi (videti red iz nizova)

$q = 0$ RED KONVERGIRA

Vježbe:

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+4n+5}{2n^2+n-1}\right)^{n^2+4n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

Napomena: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$ za posebnu korist ko e)

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

17. 11. 2009. god.

Raabeov kriterij

$$p = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

1° $p > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA

2° $p < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGIRA

3° $p = 1 \Rightarrow$ neodlučeno (nema kriterija)

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)\cdot(a+2)\cdots(a+n)}$, $a > 0$ (pozitivan broj)

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\dfrac{n!}{(a+1)\cdot(a+2)\cdots(a+n)}}{\dfrac{(n+1)!}{(a+1)\cdot(a+2)\cdots(a+n+1)}}$$

$$= \frac{\cancel{(a+1)}\cdot\cancel{(a+2)}\cdots\cancel{(a+n)}\,(a+n+1)\cdot \cancel{n!}}{\cancel{(a+1)}\cdot\cancel{(a+2)}\cdots\cancel{(a+n)}\cdot \cancel{n!}\cdot(n+1)} = \frac{a+n+1}{n+1}$$

$$p = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{a+\cancel{n}+\cancel{1}-(\cancel{n}+\cancel{1})}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a\cancel{n}}{\cancel{n}} = a$$ (znamo da je $a > 0$ iz zadatka, ali nas interesira da li je veći od 1)

1° $a > 1 \Rightarrow$ red konvergira

2° $a < 1 \Rightarrow$ red divergira

3° $a = 1$

Red glasi kada ovo uvrstim u red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1+1)(1+2)\cdots(1+n)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\cdot(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

HARMONIJSKI RED, DIVERGIRA

b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$

$$p = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{e^{-\sqrt{n}}}{e^{-\sqrt{n+1}}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(e^{-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(e^{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(e^{\frac{\left(\cancel{\sqrt{n+1}}\right)^2 - \left(\cancel{\sqrt{n}}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(e^{\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} - 1\right) = \left/ e^{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1+x \right/$$

$\to 0$

ne treba racionalizirati jer ide u ∞

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\cancel{1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cancel{-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim \frac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}^{\cancel{2}}}{2\cancel{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2} = +\infty$$

$p > 1$ red konvergira

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\mu(\mu+1)\cdots(\mu+n-1)}$

$\alpha, \beta, \mu > 0$ uzimo se da su pozitivni, zato > 0

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\dfrac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\cdot\mu(\mu+1)\cdots(\mu+n-1)}}{\dfrac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot(\alpha+n)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)\cdot(\beta+n)}{(n+1)!\cdot\mu(\mu+1)\cdots(\mu+n-1)\,(\mu+n)}}$$

$$= \frac{(n+1)!\cdot(\mu+n)}{n!\cdot(\alpha+n)\cdot(\beta+n)} = \frac{(n+1)(\mu+n)}{(\alpha+n)\cdot(\beta+n)}$$

$$p = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left[\frac{(n+1)\cdot(\mu+n)}{(\alpha+n)\cdot(\beta+n)} - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{(n+1)(\mu+n)-(\alpha+n)\cdot(\beta+n)}{(\alpha+n)\cdot(\beta+n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n\mu+\cancel{n^2}+\mu+n-(\alpha\beta+\alpha n+\beta n+\cancel{n^2})}{(\alpha+n)\cdot(\beta+n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left[n(\mu+1-\alpha-\beta)+\mu-\alpha\beta\right]}{\alpha\beta+\alpha n+\beta n+n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(\mu+1-\alpha-\beta)}{\cancel{n^2}}$$

$= \mu+1-\alpha-\beta$: Raabeov kriterij

Diskusija:

1° $\mu+1-\alpha-\beta > 1 \iff \mu > \alpha+\beta$
Red konvergira

2° $\mu < \alpha+\beta$
Red divergira

3° $\mu = \alpha+\beta$? Raabeov kriterij nema odgovora

GAUSSOV KRITERIJ (kao i svi ostali za pozitivne redove)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$$

(ne računa se limes, može se praviti napr.)

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

(λ, μ – konstante, θ_n – ograničeni niz, $\varepsilon > 0$)

ili $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \sim \lambda + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$

1° $\lambda > 1 \Rightarrow$ red konvergira

2° $\lambda < 1 \Rightarrow$ red divergira

3° $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mu > 1 \Rightarrow \text{red konvergira} \\ \mu \leq 1 \Rightarrow \text{red divergira} \end{cases}$

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\mu(\mu+1)\cdots(\mu+n-1)} \right)$ μ – konstanta

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)\cdot(\mu+n)}{(\alpha+n)\cdot(\beta+n)}$$

ne se $\sim$ (asimptotski)

λ – količnik μ – ostatak

$$= \frac{\mu n + n^2 + \mu + n}{\alpha\beta + \alpha n + \beta n + n^2}$$

ovo je način što je u knjizi ali ja mislim

najveći stepen se gleda
uvijek je ostatak manji od količnika ...

$$\left(n^2 + (\mu+1)n + \mu\right) : \left(n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta\right) = 1 + \frac{(\mu+1)-(\alpha+\beta)+\mu-\alpha\beta}{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta}$$

$$\underline{\pm n^2 \pm (\alpha+\beta)n \pm \alpha\beta}$$

$$= (\mu+1) - (\alpha+\beta) + \mu - \alpha\beta$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \sim 1 + \frac{(\nu+1-\alpha-\beta)\cancel{n}}{n^2}$$

$$= 1 + \frac{\nu+1-\alpha-\beta}{n}$$

$$\mu = \nu+1-\alpha-\beta$$

$$\nu+1-\alpha-\beta > 1$$

$\Leftrightarrow \nu > \alpha+\beta$ red konvergira

$\nu \leq \alpha+\beta$ red divergira

ovo / izvodi more binomna formula

/ realan broj; onda slijedi izraz

$$(1+x)^{\alpha} \sim 1+\alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots \quad (x \to 0)$$

binomni red; str 31.

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{p}$ p-parametar

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p}{\left[\frac{(2\cdot(n+1)-1)!!}{(2\cdot(n+1))!!}\right]^p} = \left[\frac{(2n+2)!! \cancel{(2n-1)!!}}{\cancel{(2n)!!}\cdot(2n+1)!!}\right]^p = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p =$$

$$\left(\frac{2n+1+1}{2n+1}\right)^p = \left(\frac{2n+1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\right)^p = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p \sim$$

$$1 + \frac{p}{2n+1} + \underbrace{\frac{\binom{p}{2}}{(2n+1)^2} + \dots}_{\frac{\Theta_n}{n^{1+\varepsilon}}} \sim 1 + \frac{p}{2n} + \frac{\Theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{p}{2}}{n} + \frac{\Theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

umjesto n

red konvergira ako je $\frac{p}{2} > 1 \Rightarrow \underline{p > 2}$

red divergira ako je $p \leq 2$

Za vježbu: prvo Raabeov, pa Gaussov

3.) a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\cdot(2n+1)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})\cdot(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})}$, $a>0$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}\right]^{\alpha}$, $p, q > 0$

Sa ispita

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p\cdot(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!\cdot n^{q}}$, $p>0$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)\cdot n^{3}}$, $\alpha>0$

REDOVI PROMJENJIVOG PREDZNAKA

- apsolutna konvergencija ako taj red konvergira onda i taj red konvergira.
- Primjenjuju se dosadašnji kriteriji.

Def: Ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ kažemo da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

Teorem: Ako red apsolutno konvergira, onda red konvergira.

- standardno - preko niza parcijalnih suma
- apsolutno - opći član njemu $>$ od 0
- Pojam se pojačava apsolutna konvergencija
- Ako red nije konvergentan apsolutno, postoji da je konvergentan, kada je on uvjetno konvergentan.

Def: Ako red konvergira, ali nije apsolutno konvergentan kažemo da red konvergira UVJETNO (uvjetno).

ALTERNATIVNI REDOVI

- Alternativni red, je red gdje su članovi naizmjenično pozitivni i negativni.

pozitivan, pa negativan član

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots,$$

$$a_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Za njihovu uvjetnu konvergenciju uglavnom se koristi Leibnizov kriterij.

Leibnizov krit.

Red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n > 0$ konvergira

Ako je $1^\circ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$2^\circ \quad a_n \geq a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$

Ako je opći član niza, niz koji opadajući teži ka (nuli).

Primjer: (vrlo važan)

Posmatrajmo red oblika $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in R$

- prvo ispitati apsolutnu konvergenciju

dobili hiperharmonijski red (konv. $\alpha > 1$)

$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}\right| = \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$

Pretpostavimo neka je $\alpha \leq 1$ (tada red ne konvergira apsolutno, ali ima šanse da konv. uslovno)
ako je α negativno to ne važi

$0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow$ ispunjeni su uslovi 1 i 2 iz Leibnizovog kriterija

ako je $\alpha < 0$ to je moguće i teži 1 $\Rightarrow$ red uslovno konvergira

$\alpha < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = +\infty$ tada ne možemo koristiti Leibnizov kriterij
$\Rightarrow$ red DIVERGIRA

Ako opći član ne teži 0 niz divergira

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{KONVERGIRA APSOLUTNO ako je } \alpha > 1 \\ \text{konvergira uslovno ako je } 0 < \alpha \leq 1 \\ \text{divergira ako je } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

ABELOV KRITERIJ: Posmatraju se redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

Konvergira ako: 1° red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira

2° niz $\{b_n\}$ je monoton i ograničen niz
ne može se tretirati kao konvergentan, jer konv. niz ne mora biti monoton

Dirihle se čita

Dirichlet-ov kriterij:

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira ako: 1° red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ima ograničene parcijalne sume

2° ~~$\sum$~~ niz $\{b_n\}$ monotono teži 0, mora biti monoton

Ispitati konvergenciju redova: — -1 na neto je alternativni red, a nije ni pozitivan zbog cos

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}$

krenuti od apsolutne konv.

$$\left|\frac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}\right| \leq \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}} \sim \frac{n}{\sqrt[3]{n^7}} = \frac{n \,/ :n}{n^{\frac{7}{3}} \,/ :n} = \frac{1}{n^{\frac{7}{3}-1}} = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

KONVERGIRA (hiperharmonijski $\frac{4}{3}>1$)

Zaključak: Dati red apsolutno konvergira

Red koji nije pozitivan i nije apsolutan

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{n^2+1}$

$$\left|(-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{n^2+1}\right| = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$ harmonijski red (divergira)

Red ne konvergira apsolutno

Red je alternativni (to prepoznajemo po faktoru $(-1)^{n-1}$)

Umjesto polaznog reda može se promatrati red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (konvergira po Leibnizovom kriteriju)

Red konvergira uslovno po Leibnizovom kriteriju

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n-2}{3n-1}$ ako nađemo da opći član ne teži 0

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{3n} = 1$$

red divergira jer opći član ne teži 0

(4.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cancel{\frac{2^n}{n!}} \cancel{\frac{n!}{2^n}} \frac{2^n}{n!}$

$$a_n = \frac{n!}{2^n}$$

Dalamb.

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\cancel{!} \cdot \cancel{2^n}}{\cancel{n!} \cdot 2^{\cancel{n+1}}}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Red apsolutno konvergira (gotovo)

(5.) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ - alternirajući red ? ušanji

cos $\pm$ sin tan

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} - \sin\frac{\pi}{4} \underbrace{\sin n\pi}_{0}$$ kada je pod sin cijeli broj 0, je

$$= (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$$ I kvadrant $(0, -1, 0+)$

Zaključak alternativni red

$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ jer $\frac{1}{\sqrt{n}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow$ red je alternativni

$\sin x \sim x \quad (x \to 0)$

$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \to \infty)$

⇒ možemo promatrati red

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Tako je $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}$ uvjetno konvergira (zbog ovog $\frac{1}{2}$ između 0 i 1)

imamo puno zapisati pomoću asimptotskih relacija nekim drugim putem

(6.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^{\alpha}}$ — parametar, -diskusija

$\alpha > 1 \Rightarrow$ red apsolutno konvergira očigledno, jer

$$\left| \frac{\sin n\alpha}{n^{\alpha}} \right| \leq \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{hiperharmonijski}$$

Ako je $\alpha = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{1} = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ konvergira (imamo samo 0 kao rješenje)

$\alpha < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^{\alpha}} \neq 0$

Red divergira

$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$

$\alpha \in (0, 1]$

Dirichlet: umnožak produkt niz, a Σ parcijalno ograničene

$a_n = \sin n\alpha$, $b_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$

Očito $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je opadajući (što smo već dokazali ranije)

Parcijalne sume reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, množimo s $\sin\frac{\alpha}{2}$

$$A_n = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left[\cos\left(k\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(k\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)\right]}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\cos\frac{2k-1}{2}\alpha - \cos\frac{2k+1}{2}\alpha\right]}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2} + \dots + \cos\frac{2n-1}{2}\alpha - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

sin (pozitivan)

$$|A_n| \le \frac{2}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

suma A_n ograničena

Dakle parcijalne sume reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ su ograničene, pa prema Dirihleovom kriteriju slijedi da je dati red konvergentan uslovno. Taj red ne može biti konvergentan apsolutno jer je

$$\frac{\sin n\alpha}{n^\alpha} > \frac{\sin^2 n\alpha}{n^\alpha} = \frac{\frac{1-\cos 2n\alpha}{2}}{n^\alpha}$$

$$= \frac{1-\cos 2n\alpha}{2n^\alpha} = \underbrace{\frac{1}{2n^\alpha}}_{\substack{\text{divergira} \\ (\alpha<1)}} - \underbrace{\frac{\cos 2n\alpha}{n^\alpha}}_{\text{konvergira}}$$

(sin umjesto tangenta za cos)

Po Dirihleovom kriteriju konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2n\alpha}{n^\alpha}$, dokazuje se na isti način kao za dati red.

Kad se sabiru dva reda koji konv. i div. dobije se ~~konvergentan~~ opet

2 diver - ništa, može biti konv

Razlika (a isto tako i suma) konvergentnog i divergentnog reda je DIVERGENTAN red, zato dati red ne konvergira apsolutno, ako je $\alpha \in (0,1]$

Nađi vrijednosti interval od 0,1 veći od kvadrata

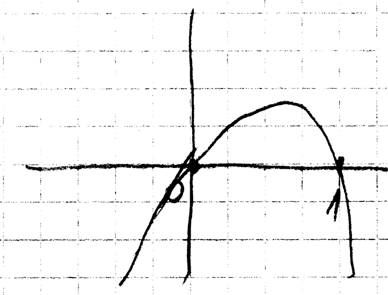
$\sin n\alpha \in [0,1] \Rightarrow \sin n\alpha > \sin^2 n\alpha$

$f(x) = x - x^2$

$x - x^2 = 0$

$x(1-x) = 0$

$x_1 = 0, \; x_2 = 1$



$x - x^2 > 0$ ako $x \in (0,1)$

$\Rightarrow x > x^2$ ako $x \in (0,1)$

Ako je veći od reda <

Za vježbu:

Dokazati da red

Dirichletov kriterij

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ konvergira, a red

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n}$ divergira

8. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1) - \sin n}{\sqrt{n}}$

24. 11. 2009. god

- konlinacija kriterij
Abel - Leibniz
Abel - Dirichlet

9.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}$

$a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $b_n = \frac{1}{n}$ (da nam a_n ima ograničene parcijalne sume
nije alternativni

$|a_n| = \frac{1}{n}$ divergira

Dirichlet - ov kriterij

$\sum a_n$ ima ograničene parcijalne sume

$\underset{\text{n-a članova}}{b_n \to 0} \; (n \to \infty)$, $\{b_n\}$ je opadajući

Abela: a_n-konvergira, b_n-monoton, ograničen

apsol. konvergira

e-monoton i ograničen, odozdo

(10.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$

konvergentan, alternativni red

$a_n = (-1)^n \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{n}$ monoton

$\operatorname{tg}(0-1{,}5x)$ I kvadrant

$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\{b_n\}$ je monoton i ograničen

red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira po Leib. kriteriju jer je $\operatorname{tg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \ (n\to\infty)$

a red $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergira po Leib. kriteriju

Za osnovu svega rečenog prema Abelovog kriterija zaključujemo da red $\sum a_n b_n$ konvergira uslovno.

Napomena:

$$|a_n b_n| = \operatorname{tg}\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim e\cdot\frac{1}{n} = \frac{e}{n} \ (n\to\infty)$$

pa dati red ne konvergira apsolutno

$n^2\pi$ – činioci da je brojnik veći za nekoliko od nazivnika možemo izvršiti dijeljenje polinoma

(11.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n^2\pi}{n+1}}{\ln^2 n}$

$$n^2\pi : (n+1) = n\pi - \pi + \frac{\pi}{n+1} = \pi\cdot(n-1) + \frac{\pi}{n+1}$$

$$\underline{-n^2\pi \pm n\pi}$$

$$= -n\pi$$

$$\underline{\mp n\pi \mp \pi}$$

$$\pi$$

formula cos zbir

$$\cos\left[\pi(n-1) + \frac{\pi}{n+1}\right] = \underbrace{\cos\pi(n-1)}_{(-1)^{n-1}}\cdot\cos\frac{\pi}{n+1} - \underbrace{\sin\pi(n-1)}_{0}\sin\frac{\pi}{n+1}$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot\cos\frac{\pi}{n+1}$$

važno je na kol

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\cos\frac{\pi}{n+1}}{\ln^2 n}$$

– iako je alternirajući ne može se samo koristiti Leibnizov kriterij, već samo koristiti Abelov kriterij jer $\cos\frac{\pi}{n+1}$ nije opadajući

I kvadrant, opadajući, a ograničen odozdo za cosinus

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n} \cdot b_n = \cos\frac{\pi}{n+1}$$

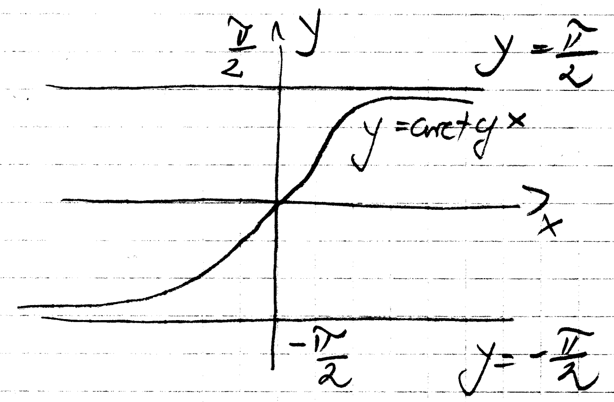
$\sum a_n$ konvergira po Leib. kriteriju (za vježbu)

niz $\{b_n\}$ monoton i ograničen (za vježbu)

$\Rightarrow \sum a_n b_n$ konvergira uvjetno po Abelovom kriteriju

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$

Uputa: Abelov kriterij $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ← uvjetno konvergira, $b_n = \operatorname{arctg} n$



arc tg (primjer rastuće funkcije)

$|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$ za sve $x \in \mathbb{R}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}_{}$ sa ispita

Za dokazivanje konvergencije reda koristimo Abelov kriterij, a da bi dokazali da konvergira red $\sum c_n$ koristimo Dirichletov kriterij ln od 1=0, zato uvijek od 2

14. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{(n+1) \ln n}$

15. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$

16. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

REALNE FUNKCIJE jedne nezavisne promjenljive

- Eksplicitni i implicitni oblik (pretvaranje iz jednog u drugi oblik)
- Definiciono područje
- Parnost - neparnost
- Nule funkcije
- Znak funkcije

Granična vrijednost ili limes funkcije

ako x teži nekom broju, prvo uvrstiti taj broj. kada uvrstimo više ne pišemo lim, a njega trebalo pisati dok imamo x

1) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^3+x-1}{4x-\sqrt{2x+1}} = \frac{4 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1}{4 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}+1}} =$

$= \frac{0}{2-\sqrt{2}} = 0$

kad dobijemo vrijednost se može obrisati

2) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12} = \frac{9-15+6}{9-21+12} = \frac{0}{0}$ (kao imamo $\frac{0}{0}$ neodređeno nije broj, to je jedan neodređeni oblik)

Neodređeni oblici!

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, +\infty - \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$ (imamo kada treba posebno ispitati)

$$x^2+5x+6 = x^2+2x+3x+6$$
$$= x\cdot(x+2)+3\cdot(x+2)$$
$$(x+2)\cdot(x+3)$$

$$x^2+7x+12 = x^2+4x+3x+12$$
$$= x\cdot(x+4)+3\,(x+4)$$
$$= (x+4)\,(x+3)$$

– tade vrstim (-3)

$$\lim_{n\to -3} \frac{(x+2)\cdot\cancel{(x+3)}}{(x+4)\cdot\cancel{(x+3)}} = \frac{-1}{1} = -1$$

3 $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5-4x+3}{x^4-3x+2} = \dfrac{0}{0}$ Hornerova šema

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	1	0	0	0	-4	3
		1	1	1	1	-3
1	1	1	1	1	-3	0

?

$1\times 1 = 1+0 = 1$

$$x^5-4x+3 = (x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x-3)$$

$$x^4-3x+2$$

	1	0	0	-3	2
		1	1	1	-2
1	1	1	1	-2	0

$$x^4-3x+2 = (x-1)\cdot(x^3+x^2+x-2)$$

$$\lim_{x\to 1} = \frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x^4+x^3+x^2+x-3)}{\cancel{(x-1)}\,(x^3+x^2+x-2)} = \frac{4-3}{3-2} = 1$$

(4.) ako su isti pod korijenom možemo uvesti smjene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \frac{0}{0}$$

$x \to 0$

smjena $1+x = t^6 \to 1$

$\Rightarrow t \to \underline{1}$

$$\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t^6}-1}{\sqrt[3]{t^6}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^3-1}{t^2-1}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{\cancel{(t-1)}\cdot(t^2+t+1)}{\cancel{(t-1)}\cdot(t+1)} = \frac{3}{2}$$

metoda racionalizacije

razlika kubova

(5.) $$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{9+2x}+5}{\sqrt{9+2x}+5} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\cdot 2+2^2}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\cdot 2+2^2} =$$

$$= \lim_{x\to 8} \frac{\left[(\sqrt{9+2x})^2-5^2\right]\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}+2\cdot\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left[(\sqrt[3]{x})^3-2^3\right]\cdot\left(\sqrt{9+2x}+5\right)}$$

$$= \lim_{x\to 8} \frac{(2x-16)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+2\cdot\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)\cdot(\sqrt{9+2x}+5)} = \lim_{x\to 8} \frac{2\cdot(x-8)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+2\cdot\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)\cdot(\sqrt{9+2x}+5)} =$$

$$= \frac{2\cdot(\sqrt[3]{64}+2\cdot\sqrt[3]{8}+4)}{\sqrt{25}+5} = \frac{2(4+4+4)}{5+5} = \frac{2\cdot 12}{2\cdot 5} = \frac{12}{5}$$

Za vježbu:

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)\cdot(1+3x)-1}{x}$$

b) $$\lim_{x\to 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x}\right)$$

c) za ispit $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{x}}$$

d) $$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^4+5x^2-14}{x^3-2x}$$

e) racionalizacija razlika kubova $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\cdot\sqrt[3]{x^4}}$$

zbir kubova

ЗАПАМЕТ:

sinα + sin3

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

što imamo pod sin stavit ću u nazivnik

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1} \cdot 3 = 3$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax \,/ :x}{\sin bx \,/ :x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin ax}{x} \cdot a}{\frac{\sin bx}{x} \cdot b} = \frac{a}{b}$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$$

formula

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2} \cdot 2}\right)^2$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

4. $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x \cdot \cos 2x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

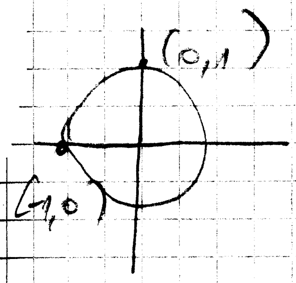
$t = x - \frac{\pi}{4} \to 0$ uvodimo novu var koja teži da nuli

$$x = t + \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin 4\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos 2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(4t+\pi) \cdot \cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)}{t^2}$$

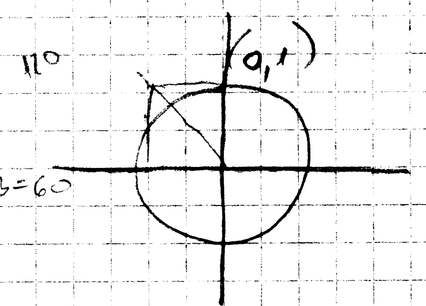
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin 4t\overset{-1}{\cos\pi} + \overset{0}{\sin\pi}\cos 4t}{t^2}\cdot\left(\cos 2t\cdot\overset{0}{\cos\frac{\pi}{2}} - \sin t\cdot\overset{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)$$



$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin 4t\cdot(-\sin^2 t)}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin 4t}{4t}\cdot\frac{\sin 2t}{2t}\cdot 8 = 8$$

(5.) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1-4\sin^2 x}$



$t = x - \frac{\pi}{6} \to 0$

$x = t + \frac{\pi}{6}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1-4\sin^2\left(t+\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1-4\left(\sin t\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{6}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{\frac{1}{2}}\cos t\right)^2}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1-4\cdot\left[\frac{3}{4}\sin^2 t + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{1}{4}\cos^2 t\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1-3\sin^2 t-2\sqrt{3}\sin t\cos t-\cos^2 t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\sin^2 t-3\sin^2 t-2\sqrt{3}\sin t\cos t}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{-2\sin^2 t-2\sqrt{3}\sin t\cos t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{\sin t}}{-2\cancel{\sin t}(\underbrace{\sin t}_{\downarrow\, 0}+\sqrt{3}\underbrace{\cos t}_{\downarrow\, 1})}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{-2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{6}$$

$$1-2\sin x = 2\left(\frac{1}{2}-\sin x\right) = 2\cdot\left(\sin\frac{\pi}{6}-\sin x\right.$$

(6.) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-tg^2 x} = \ell$$

$$1-tg^2 x = 1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x-(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} =$$

2, razlika kvadrata

$$= \frac{\cos^2 x-1+\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x} = \frac{(\sqrt{2}\cos x-1)(\sqrt{2}\cos x+1)}{\cos^2 x}$$

$$\ell = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{\sqrt{2}\cos x-1}}{\frac{\cancel{(\sqrt{2}\cos x-1)}\cdot(\sqrt{2}\cos x+1)}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{2}\cos x+1} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1} = \frac{\frac{2}{4}}{1+1} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

ampfem mjesti ovaj krimes

(7) $$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\cos 2x-1}{x^2}$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\cos 2x\cos 3x-1}{x^2}$$

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\cos 2x-\cos x+\cos x-1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x(\cos 2x-1)+1(\cos x-1)}{x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\overset{\nearrow 1}{\cos x}(1-\cos 2x)}{x^2} - \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}}_{\frac{1}{2}\text{ (zad. str. 3)}}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\overset{\nearrow 1}{\cos x}\cdot \overbrace{2\sin^2 x}^{\to 1}}{x^2} - \frac{1}{2}$$

$$= -2 - \frac{1}{2} = \frac{-5}{2}$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cos 2x \cos 3x - \cos 3x + \cos 3x - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\nearrow 1\ \cos 0 = 1}{\cos 3x}(\cos x \cos 2x - 1)}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2}$$

$$= L_1 - \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{3x}{2}}{x^2} =$$

$$= \frac{-5}{2} - 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3}{2}x}\cdot\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{-5}{2} - \cancel{2}\,\frac{9}{\cancel{4}_2} = -\frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{14}{2} = -7$$

$$L_3 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x - 1}{x^2}$$

Za vježbu:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos(2\sqrt{2}x))}{x^2}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

Uputa: $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$

Uputa: $\operatorname{arctg} x = t \to x = \operatorname{tg} t$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ racionalizacija, z. ciljevi

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin px - \cos px}$ Uputa: $\sin x = \sin 2\cdot\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{|tg 4x|}{\sqrt{1-\cos 4x}}$ izgubi se korijen, pa apsolutno

$$\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$$

31.11.2009. god.

Broj e može se definisati na dva načina.

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (1^\infty)$$

kada god uočimo imamo ovakvih kojih je e

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} \quad (1^\infty) = \lim_{x\to a}\left[1+\underbrace{u(x)-1}_{\to 0}\right]^{v(x)} = \lim_{x\to a}\left\{\left[1+(u(x)-1)\right]^{\frac{1}{u(x)-1}}\right\}^{v(x)[u(x)-1]}$$

imamo sve korake i jednostavno

$$= e^{\ell}, \quad \ell = \lim_{x\to a} \underline{v(x)\cdot[u(x)-1]}$$

(1.) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$= \ln e = 1$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

(2.) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} =$ $\left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t \to 0 \\ e^x = t+1 \\ x = \ln(t+1) \end{array} \right|$

$\lim_{t\to 0}\frac{t \,/:t}{\ln(1+t)\,/:t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}$ zadatak broj 1, ima ovu vrijednost $=1$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1}$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \overset{\text{po definiciji logaritma}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln a^x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot \ln a \overset{z.2.}{=} \ln a$$

Ako se podudara ono što je kod e i u nazivniku rezultat je 1

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1+1-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0} a\cdot\underbrace{\frac{e^{ax}-1}{ax}}_{\to 1} - \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{e^{bx}-1}{bx}}_{\to 1}\cdot b$$

$$= a-b$$

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x\, e^{3x^2}-1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x\cdot e^{3x^2}-e^{3x^2}+e^{3x^2}-1}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}(\cos 3x-1)}{\sin^2 x} + \frac{e^{3x^2}-1\ /:x^2}{\sin^2 x\ /:x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{e^{3x^2}}^{\to 1}\dfrac{-2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}}{\underbrace{\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1}} + \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\dfrac{e^{3x^2}-1}{3x^2}}^{\to 1}\,3}{\underbrace{\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1}} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\left(\overbrace{\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}}^{\to 1}\cdot\frac{3}{2}\right)^2 + 3 = -2\cdot\frac{9}{4}+3 = -\frac{9}{2}+3 = -\frac{3}{2}$$

6. $$L=\lim_{x\to 3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}}_{u(x)} = \left(1^{\infty}\right)$$

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{l},\quad l=\lim_{x\to a} v(x)\cdot\left[u(x)-1\right]$$

$$L=e^{l},$$

$$l=\lim_{x\to 3}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}\cdot\left(2-\frac{x}{3}-1\right) = \lim_{x\to 3}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right) =$$

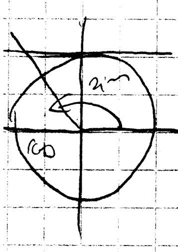
$= \lim_{x\to 3} \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}\cdot\frac{3-x}{3}$ $\qquad \operatorname{ctg} = \frac{\cos}{\sin}$

$= \frac{1}{3} \lim_{x\to 3}(3-x)\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3} = \left| \begin{array}{l} 3-x=t\to 0\\ x=3-t\end{array}\right| = \frac{1}{3}\lim_{t\to 0} t\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\cdot(3-t) =$

$= \frac{1}{3}\lim_{t\to 0} t\operatorname{ctg}\left(\pi-\frac{\pi t}{3}\right) = \left|\operatorname{ctg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha\right| = \frac{1}{3}\lim_{t\to 0} t\cdot\left(-\operatorname{ctg}\frac{t\pi}{3}\right)$

$= -\frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{\pi t}{3}\cdot\frac{\cos\frac{\pi t}{3}}{\sin\frac{t\pi}{3}}\cdot\frac{3}{\pi} = -\frac{1}{\pi}$ $\qquad (\to 1)$

napravi umjesto $\frac{\pi}{3}$



ctg negativan u II kvadrantu

$L = e^{-\frac{1}{\pi}}$

7. $L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a,b,c>0)$ $=(1^\infty)$

$L=e^{\ell}$

$\ell = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)$

$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{1}{3}\ln(a\cdot b\cdot c)$

$= \ln(a\cdot b\cdot c)^{\frac{1}{3}}$

$L=e^{\ln(a\cdot b\cdot c)^{\frac{1}{3}}} = (a\cdot b\cdot c)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}$

Za vježbu:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(2-\frac{2x}{\pi}\right)^{tg x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin 3x}-1}{\sin 5x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left[tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{ctg x}$

SIMBOLI O i o (LANDAU SIMBOLI)

Dvije funkcije

$f(x) = O(g(x))\ (x\to a)$ mjesto kojoj teži x

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ tada se za $f(x)$ i $g(x)$ kaže da su istog reda

$f(x) = o(g(x))\ (x\to a)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$\underline{f(x)\sim g(x)}\ (x\to a) \Leftrightarrow \underline{\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$

Primjeri:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \sin x = x + o(x),\ x\to 0$ puno od x

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = 1-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2),\ x\to 0$ ostatak zanemarujući u odnosu na glavni

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg x}{x} = 1 \Leftrightarrow tg x = x + o(x),\ x\to 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \Leftrightarrow e^x = 1+x+o(x),\ x\to 0$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \ln(1+x) = x + o(x),\ x\to 0$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n-1}{x} = n$ [illegible] $+$

$\Leftrightarrow (1+x)^n = 1+nx+o(x),\ x\to 0$

[illegible]

ili: $(1+x)^n = 1+nx+\binom{n}{2}x^2+o(x^2),\ x\to 0$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{n}$ ([illegible], [illegible]: $1+x=t^n$, $t\to 1$)

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{1+x} = 1+\dfrac{x}{n}+o(x),\ x\to 0$

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \left| \cancel{1+x=t}\ x=1+t,\ t\to 0 \right| =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(1+t)^m-1}{(1+t)^n-1} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cancel{1}+mt+o(t)-\cancel{1}}{\cancel{1}+nt+o(t)-\cancel{1}} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{mt}{nt} = \dfrac{m}{n}$

2. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} = \left| \begin{matrix} x-7=t \\ t\to 0 \\ x=t+7 \end{matrix} \right|$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t+9}-\sqrt[3]{t+27}}{\sqrt[4]{t+16}-2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{9\left(1+\frac{t}{9}\right)}-\sqrt[3]{27\left(1+\frac{t}{27}\right)}}{\sqrt[4]{16\left(1+\frac{t}{16}\right)}-2} =$

$\sqrt[n]{1+x} = 1+\dfrac{x}{n}+o(x)$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{3\sqrt{1+\frac{t}{9}}-3\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}}{2\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}-2} = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cancel{1}+\frac{t/9}{2}+o(t)-\left(\cancel{1}+\frac{t/27}{3}+o(t)\right)}{\cancel{1}+\frac{t/16}{4}+o(t)-\cancel{1}}$

$= \dfrac{3}{2}\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cancel{t}\cdot\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{81}\right)}{\cancel{t}\cdot\frac{1}{64}} = \dfrac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\frac{9-2}{\cancel{3}\cdot\cancel{9}\cdot 2\cdot 9}}{\frac{1}{\cancel{64}\,32}} = \dfrac{\frac{7}{6\cdot 9}}{\frac{1}{32}} = \dfrac{7\cdot \cancel{32}^{16}}{\cancel{6}_{3}\cdot 9} = \dfrac{112}{27}$

(3.) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5x + o(x) - (3x + o(x))}{x + o(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2$

(5.) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 - \frac{1}{2}a^2x^2 + o(x^2))}{\ln(1 - \frac{1}{2}b^2x^2 + o(x^2))} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}a^2\cancel{x^2}}{-\frac{1}{2}b^2\cancel{x^2}} = \frac{a^2}{b^2}$

Za vježbu:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[16]{1+\sin x}}{\operatorname{tg} x}$

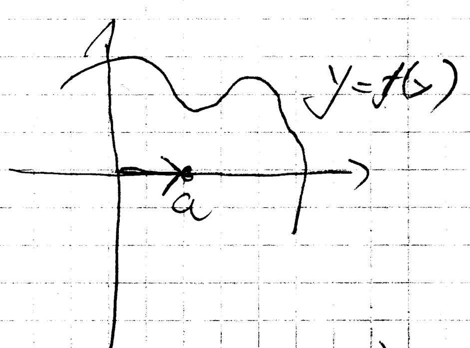
b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\sin x}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}x}-1)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - \cos x}{\sin^2 x}$

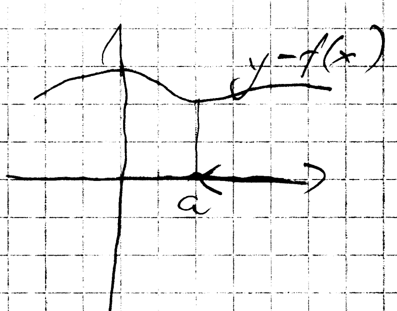
d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{tg}5x - \cos x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[5]{1+x}}$

NEPREKIDNOST FUNKCIJE

- lijevi limes $f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ (kraće: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$)

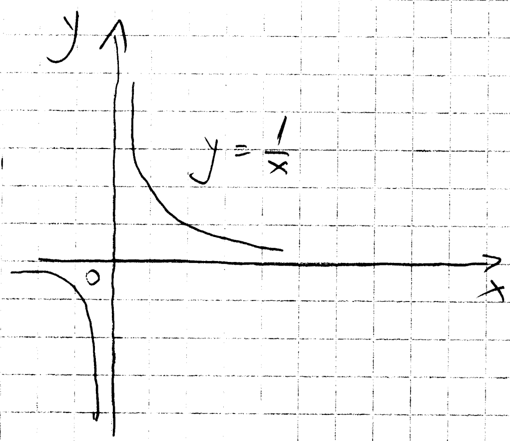


Desni limes $f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ (k: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$)



$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ako je $f(a-0) = f(a+0) = A$

x teži A jednak je A, i on postoji ako su oni jednaki i njihova vrijednost je jednaka tom A



$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = ?$

$\lim\limits_{x\to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$

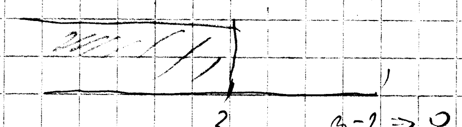
$\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = +\infty$

x i y - asimptote na funkciju

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ ne postoji

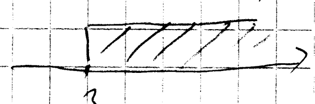
1. Izračunati lijevi i desni limes date funkcije u datim tačkama

a) $f(x) = \frac{1}{3-x}$, $x = 3$



$3-2>0$
$3-2{,}0>0$
$3-2{,}999>0$

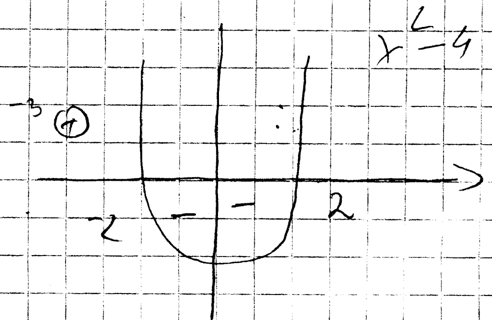
$\lim\limits_{x\to 3_-} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{0_+} = +\infty$



$3-4<0$
$3-3{,}3<0$
$3-3{,}0001<0$

$\lim\limits_{x\to 3_+} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{0_-} = -\infty$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $x = \pm 2$



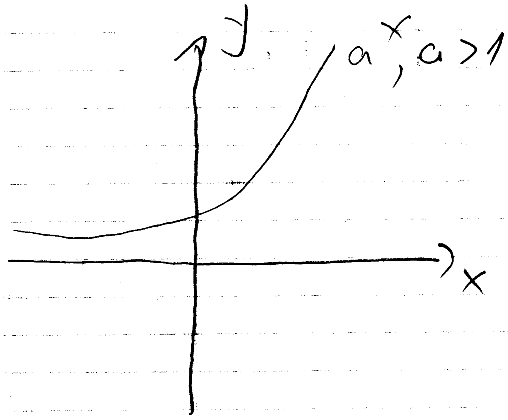
$\lim\limits_{x\to -2_-} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0_+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0} = -\infty$

$$\lim_{x\to 2_-} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0_-} = -\infty \qquad 2 - 1{,}99$$

$$\lim_{x\to 2_+} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0_+} = +\infty$$

c) $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}, \quad x = 0$



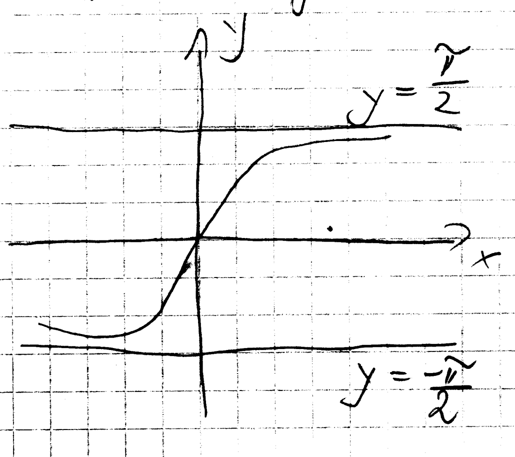
$$\boxed{a^{+\infty} = +\infty}$$

$$\boxed{a^{-\infty} = 0} \quad \text{ako je } a>1$$

$$\lim_{x\to 0_-} 3^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{1}{0_-}} = 3^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0_+} 3^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{1}{0_+}} = 3^{+\infty} = +\infty$$

d) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad x = 0$



$$\lim_{x\to 0_-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg} \frac{1}{0_-} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0_+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg} \frac{1}{0_+} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Za vježbu

e) $f(x) = \frac{-1}{x^2-3x-4}, \quad x = 4 \text{ i } x = -1$

f) $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}, \quad x = 1$

Def: Kažemo da je funkcija $y=f(x)$ neprekidna u tački $x=a$, ako postoji i konačni su $f(a-0)$ i $f(a+0)$ i $f(a-0)=f(a+0)=f(a)$

U suprotnom kažemo da funkcija $y=f(x)$ ima prekid u tački $x=a$ i razlikujemo prekid prve vrste i prekid druge vrste.

Prekid I vrste:

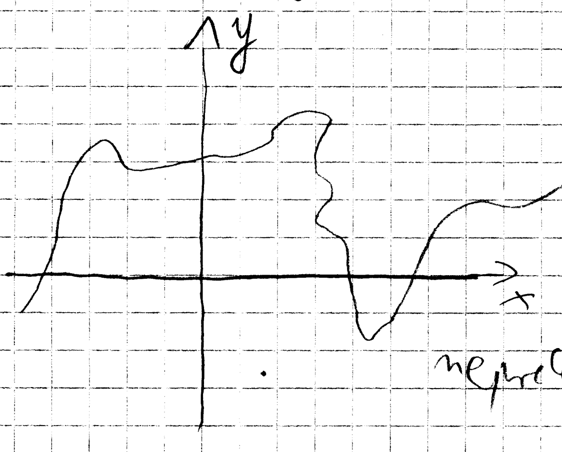
- postoji $f(a-0)$ i $f(a+0)$, konačni su, ali ~~nisu jednaki~~

$$f(a-0) \neq f(a) \text{ ili } f(a+0) \neq f(a)$$

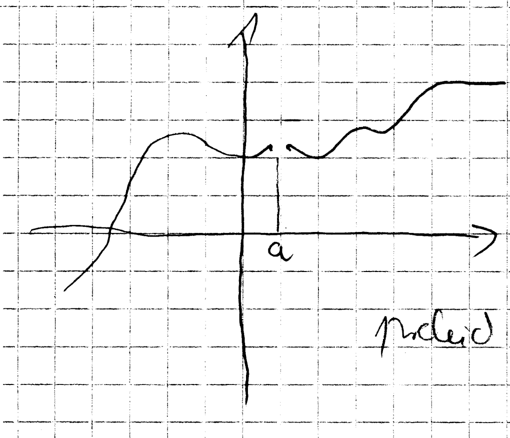
Prekid II vrste:

- u svim ostalim slučajevima.
- ako jedan od ova dva limesa ne postoji, ili ako postoje, ali su beskonačni

Def: Kažemo da je funkcija $y=f(x)$ neprekidna na skupu $S \subseteq \mathbb{R}$ ako je ona neprekidna u svakoj tački $x \in S$ iz skupa



neprekidna (nacrtana iz jednog poteza)



prekid u $x=a$

Def: Kažemo da je funkcija $y=f(x)$ ravnomjerno neprekidna na skupu $S \subseteq \mathbb{R}$ ako za $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta = \delta(\varepsilon))$ -funkcija od ε

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

za sve $x', x'' \in S$

Ako je funkcija ravnomjerno neprekidna na nekom skupu S onda je na tom skupu i neprekidna. Obrnuto ne važi uvijek.

sin x, cos x, log. funkcija

TEOREM: Elementarne funkcije su neprekidne na svim intervalima na kojima su definisane.

(2.) Ispitati neprekidnost funkcije. polinomi definisani za sve realne x

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$

Jedina eventualna tačka prekida ove funkcije mogla bi biti $x=1$.

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (x+2) = 3$$

$f(1) = 1^2 = 1$ moraju postojati i biti konačni to ispunjeno, ali da su isti to nije ispunjeno.

$x=1$ je tačka prekida prve vrste.

(b.) $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \le 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \\ 3x - x^2, & x > 2 \end{cases}$

Imamo 3 moguće tačke prekida i treba za svaku tačku ispitati uslove.

Opet idem lim

$\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (1+x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} x = 0$

$f(0) = 1+0 = 1$,, IMA PREKID u tački $x=0$ (I vrste)
jer lim postoji, ali nisu jednaki

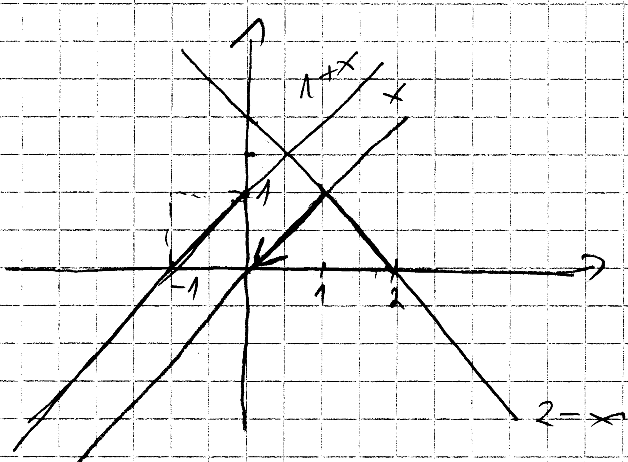
$\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1_-} x = 1$

$\lim\limits_{x\to 1_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (2-x) = 1$

$f(1) = 2-1 = 1$ nema prekida

u tabeli bijeveno dane strane

$x = 2 \to$ za vjeltu

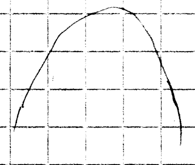


x	0	-1
$1+x$	1	0

x	0	1
x	0	1

x	1	2
$2-x$	1	0

zle x-eva u 0;3



8. 12. 2008 god.

3) Odrediti λ tako da data funkcija bude neprekidna za sve realne x i zatim nacrtati grafik funkcije.

a) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x<0 \\ \lambda, & x=0 \\ 1+x, & x>0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 3-\cancel{1}x^2, & x>1 \end{cases}$ vježba

a) funkcija je očito neprekidna u svim tačkama $x \neq 0$

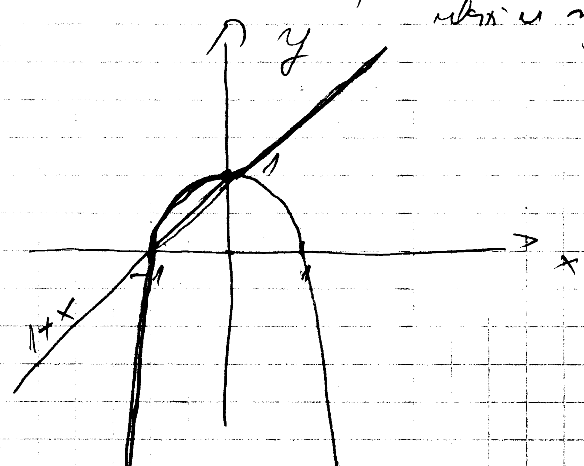
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1-x^2) = 1 \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1+x) = 1 \\ &f(0) = \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = 1$$

parabolica do te tačke, ne dalje u njen, nije crtana

$1-x^2=0$
$x^2=1$
$x=\pm 1$

$x=0 \Rightarrow 1-x^2=1$

x	-1	0
$1+x$	0	1



Nama je za x-eve <0

Grafik je očigledno da λ mora biti 1

4. za vježbu

Odrediti a i b tako da je funkcija $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \le -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

neprekidna za ~~sve~~ $x \in R$.

Zatim nacrtati tu funkciju za a i b

Ravnomjerno neprekidne funkcije

5. Dokazati ravnomjernu neprekidnost datih funkcija na datim intervalima

a) $f(x) = x^2, \quad x \in [0,1]$

b) $f(x) = x^3, \quad x \in [1,2]$

c) $f(x) = \sin x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

a) $x', x'' \in [0,1]$ uzimo 2 x i pretpostavimo da su relativno blizu, da je njihova razlika manja od δ

$|x' - x''| < \delta$ gdje je δ neka granica

$$\Rightarrow \underbrace{|f(x') - f(x'')|}_{<\varepsilon} = |(x')^2 - (x'')^2| = |(x' - x'')(x' + x'')| =$$

$$= \underbrace{|x' - x''|}_{<\delta} \cdot \underbrace{|x' + x''|}_{<2} < 2\delta \qquad \boxed{\begin{matrix} 2\delta = \varepsilon \\ \delta = \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}}$$

teži da bude $< \varepsilon$

Ako je $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ tada ovo važi $|f(x') - f(x'')| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

c) Upotreba $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$ (x', x'')

Pošto je u intervalu od $(0, \frac{\pi}{2})$

$\sin x < x$ kada $(x \in (0, \frac{\pi}{2}))$

Dokaz da je ravnomjerna neprekidna.

Nije ravnomjerno neprekidna

(6.) Dokazati da funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ nije ravnomjerno neprekidna na intervalu $(0,1)$

$$|f(x')-f(x'')| \geq \varepsilon_0$$ (suprotno do ravnomjerne neprek. ; imati neki broj ε₀ je veći)

ε je manje < 0

Vrijedi je $0 < \varepsilon < 1$

pomoćna promjenljiva

$$x' = \frac{\varepsilon}{n+1}, \quad x'' = \frac{\varepsilon}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$|x'-x''| = \left|\frac{\varepsilon n - \varepsilon(n+1)}{(n+1)\cdot n}\right| = \frac{|\varepsilon n - \varepsilon n - \varepsilon|}{n\cdot(n+1)} = \frac{\varepsilon}{n\cdot(n+1)} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

nazivnik pozitivan pa se može odbiti!!

recipročna vrijednost ; pozitivno pa ne treba modul

$$|f(x')-f(x'')| = \left|\frac{n+1}{\varepsilon} - \frac{n}{\varepsilon}\right| = \frac{n+1-n}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} > 1 \text{ sigurno}$$

za ispit

(7.) Dokazati da funkcija $y = \sin\frac{1}{x}$ nije ravnomjerno neprekidna na intervalu $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$

Uputa: $x' = \frac{1}{n\pi}$ $\quad x'' = \frac{2}{(2n+1)\pi}$

razlika $x \to 0$ a razlika vrijednosti funkcija po modulu veći od nekog konstantnog ? broja.

IZVOD (DERIVACIJA) FUNKCIJE

Def: $y=f(x) \Rightarrow y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

y' – prvi izvod (derivacija) funkcije $y=f(x)$

Diferenciranje: je nalaženje izvoda funkcije.

Izvodi po definiciji

$\Delta x = ?$

1.) $y = x^2$

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2x$

Izvod – $(x^2)' = 2x$

2.) $y = x^3$

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \cancel{x^3}}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\cancel{\Delta x}} = 3x^2$

$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1} \quad (n \in R$

③ $y=a^x, \quad 0<a\neq 1$

$$y' = \lim_{x\to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} =$$

$$= a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \ln a$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{a^t-1}{t} = \ln a$$

④ $y=\ln x$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

ИЗВОД ПОЛИНОМА

1. $y = 3x^5 - 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$

$y' = (3x^5)' - (2x^3)' + (9x^2)' + (7x)' - 6'$

$y' = 3\cdot 5x^4 - 2\cdot 3x^2 + 9\cdot 2x + 7\cdot 1$

$y' = 15x^4 - 6x^2 + 18x + 7$

2. $y = \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} - 2x^4 + 6x^3$

$y = 5x^{-2} + 3x^{-1} - 2x^4 + 6x^3$

$y' = 5\cdot(-2)\cdot x^{-3} + 3\cdot(-1)\cdot x^{-2} - 2\cdot 4x^3 + 3\cdot 6x^2$

$y' = -10x^{-3} - 3x^{-2} - 8x^3 + 18x^2$

$y' = \frac{-10}{x^3} - \frac{-3}{x^2} - 8x^3 + 18x^2$

(3.) $y = \sqrt[4]{x^5} - \dfrac{2}{x\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}$

$y = x^{\frac{5}{4}} - \dfrac{2}{x \cdot x^{\frac{1}{3}}} + \dfrac{1}{x^{\frac{1}{6}}}$

$y = x^{\frac{5}{4}} - \dfrac{2}{x^{\frac{4}{3}}} + \dfrac{1}{x^{\frac{1}{6}}}$ $\qquad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$y = x^{\frac{5}{4}} - 2x^{-\frac{4}{3}} + x^{-\frac{1}{6}}$ $\qquad -\frac{4}{3} - 1 = \frac{-4-3}{3} = -\frac{7}{3}$

$y' = \frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}} - 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) x^{-\frac{7}{3}} - \frac{1}{6} \cdot x^{-\frac{7}{6}}$

$y' = \frac{5}{4} \sqrt[4]{x} + \frac{8}{3} \sqrt[3]{x^{-7}} - \frac{1}{6} \sqrt[6]{x^{-7}}$

(4.) $y = x^2 \ln x$

$y' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)'$

$y' = 2x \ln x + \cancel{x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$

$y' = 2x \ln x + x$

$y' = x \, (2 \ln x + 1)$

(5.) $y = (2x^2 - 3x + 1) \cdot e^x$

$y' = (4x - 3) \cdot e^x + (2x^2 - 3x + 1) \cdot e^x =$

$y' = e^x \, (4x - 3 + 2x^2 - 3x + 1)$

$y' = e^x \cdot (2x^2 + x - 2)$

(6.) $y = x \sin x \cdot \cos x$

$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

$y' = \sin x \cos x + x \cos x \cdot \cos x + x \cdot \sin x \cdot (-\sin x)$

$y' = \sin x \cdot \cos x + x \cos^2 x - x \sin^2 x$

7.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y = \frac{x^2+1}{4x-2}$$

$$y' = \frac{(x^2+1)'\,(4x-2)\cdot(x^2+1)\,(4x-2)'}{(4x-2)^2}$$

$$y' = 2x\cdot(4x-2)-(x^2+1)4$$

$$y' = \frac{8x^2-4x-4x^2-4}{(4x-2)^2}$$

$$y' = \frac{4x^2-4x-4}{(4x-2)^2} = \frac{4\cdot(x^2-x-1)}{(4x-2)^2}$$

8.

$$y = tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$y' = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

9. $y = \frac{2+\ln x}{x^3}$

$$y' = \frac{(2+\ln x)' x^3 - (2+\ln x)\cdot (x^3)'}{(x^3)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^3 - (2+\ln x)\cdot 3x^2}{x^6}$$

$$y' = \frac{x^2 - 6x^2 - 3x^2 \ln x}{x^6} = \frac{-5x^2 - 3x^2 \ln x}{x^6}$$

$$y' = \frac{-\cancel{x^2}(5+3\ln x)}{x^{\cancel{6}\,4}}$$

$$y' = \frac{-(5+3\ln x)}{x^4}$$

Za vežbu:

$y' = ?$

a) $y = x - \sin x \cos x$

b) $y = 2x \cos x + (x^2 - 2)\sin x$

c) $y = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\cdot e^x$

d) $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$

e) $y = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}$

f) $y = x \arcsin x$

g) $y = \frac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$

IZVOD SLOŽENE FUNKCIJE

Funkcija koja nastaje slaganjem

ako imamo $y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f(g(x)) \cdot g'(x)$

$$y = f(g(h(x))) \Rightarrow y' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

...

1. $y = [f(x)]^n$

$$y = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

a) $y = (x^4 + x^3 - 1)^5$

$y' = 5 \cdot (x^4 + x^3 - 1)^4 \cdot (x^4 + x^3 - 1)'$

$y' = 5 (x^4 + x^3 - 1)^4 \cdot (4x^3 + 3x^2)$

b) $y = \sin^2 x$

$y' = 2 \cdot \sin x \cdot [\sin x]'$

$y' = 2 \sin x \cdot \cos x$

$y' = \sin 2x$

c) $y = \sin^2 3x$

$y' = 2 \sin 3x \cdot (\sin 3x)'$

$y' = 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot (3x)'$

$y' = \sin 6x \cdot 3$

$y' = 3 \sin 6x$

d) $y = \sqrt[4]{(x^2 + 5x + 1)^7}$

$y = (x^2 + 5x + 1)^{\frac{7}{4}}$

$y' = \frac{7}{4} \cdot (x^2 + 5x + 1)^{\frac{7}{4} - 1} \cdot (x^2 + 5x + 1)'$

$y' = \frac{7}{4} \cdot (x^2 + 5x + 1)^{\frac{3}{4}} \cdot (2x + 5)$

$y' = \frac{7}{4} \cdot \sqrt[4]{(x^2 + 5x + 1)^3} \cdot (2x + 5)$

Za vježbu:

e) $y = \sqrt[3]{\sin x}$

f) $y = -3\cos^5 x + 10\cos^3 x - 15\cos x$

g) $y = \left(\frac{x^2}{x^2+3}\right)^4$

h) $y = tg\, x - \frac{1}{3} tg^3 x + \frac{1}{5} tg^5 x$

j) $y = \sqrt[3]{\ln^2 x + 3\ln x - 2}$

2.) $x = \sqrt{f(x)}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$

$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

a) $y = \sqrt{2-x^2}$

$y' = \frac{(2-x^2)'}{2\sqrt{2-x^2}}$

$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}$

$y' = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$

b) $y = \sqrt{x + \sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$y' = \frac{(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'}{2\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{1 + \frac{(x+\sqrt{x})'}{2\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} =$

$= \frac{1 + \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{\frac{2\sqrt{x+\sqrt{x}} + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} =$

$= \frac{\frac{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}}{4\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{4\cdot\sqrt{x^2+x\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{8\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}} =$

Za vježbu:

a) $y=\sqrt{x^3+1}$

d) $y=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

e) $y=\sqrt{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}$

(3.) $y=e^{f(x)}$

$y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$

a) $y=e^{10^x}$

$y'=e^{10^x}\cdot(10^x)'$

$y'=e^{10^x}\cdot 10^x\ln 10$

b) $y=e^{(x^2-3)^5}$

$y'=e^{(x^2-3)^5}\cdot\left[(x^2-3)^5\right]'$ ← složena

$y'=e^{(x^2-3)^5}\cdot 5(x^2-3)^4\cdot(x^2-3)'$

$y'=e^{(x^2-3)^5}\cdot 5(x^2-3)^4\cdot 2x$

$y'=10x\cdot(x^2-3)^4\cdot e^{(x^2-3)^5}$

c) $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$

$y'=e^x+e^{e^x}\cdot(e^x)'+e^{e^{e^x}}\cdot(e^{e^x})'$

$y'=e^x+e^{e^x}\cdot e^x+e^{e^{e^x}}\cdot e^{e^x}\cdot(e^x)'$

$y'=e^x+e^{e^x+x}+e^{e^{e^x}}\cdot e^{e^x}\cdot e^x$

$y'=e^x+e^{e^x+x}+e^{e^{e^x}+e^x+x}$

Za vježbu:

d) $y=e^{x-\frac{1}{x}}$

e) $y=e^{\sin^3 x}$

f) $y=e^{\sqrt{1+xe^x}}$

(4.) $y = \ln f(x)$

$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

a) $y = \ln \sin x$

$$y' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$$

$y' = \operatorname{ctg} x$

b) $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$

$$y' = \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\frac{-2}{x-1}}{\frac{x+1}{1}} = \frac{-2}{x^2-1}$$

c) $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$$y' = \frac{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)'}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + \frac{(1+x^2)'}{2 \cdot \sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2} \cdot \sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}+x}}{\sqrt{1+x^2} \cdot \left(\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

d) $y = \ln(\ln(\ln x)))$

$$y' = \frac{(\ln(\ln x))'}{\ln(\ln x)} = \frac{\frac{(\ln(\ln x))'}{\ln x}}{\ln(\ln x)}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x \cdot \ln(\ln x)} = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}$$

Za vježbu:

e) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$ g) $y = \ln(\arcsin x + x)$

f) $y = \ln tg \frac{x}{2}$ h) $y = \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$

Zadaci:

a) $y = x - \sin x \cos x$

$y' = x' - (\sin x \cdot \cos x)'$

$y' = -\sin x' \cos x + \sin x \cdot \cos x'$

$y' = -\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)$

$y' = -\cos^2 x - \sin^2 x$

b) $y = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x$

$y' = (2x \cos x)' \cdot (x^2-2) \sin x + 2x \cos x \cdot [(x^2-2) \sin x]'$

$y' = 2x (\cos x)' \cdot (x^2-2) \sin x + 2x \cos x \cdot$

15.12. 2007.god.

Izvod $x = 1$
-//- $y = y'$

IZVOD IMPLICITNO ZADANE FUNKCIJE

$y=f(x)$ eksplicitni oblik (ako je y izraženo preko x)

$F(x,y)=0$ - implicitni oblik

Pr. Ako jednadžba $x^2+y^2=r^2$ - implicitni oblik

$$y^2=r^2-x^2$$

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$ - eksplicitni oblik

Pr. $xe^y+\ln(x+y)=2$ - IMPLICITNI OBLIK iz kojeg ne možemo preći na eksplicitni

Ako treba naći oblik $[f(y)]'_x=[f(y(x))]'_x=f'(y)\cdot y'(x)$, izvod složene funkcije

Pr: $(y^3)'_y=3y^2$

$(y^3)'_x=3y^2\cdot y'$, - uvjet na kraju $\cdot y'$, ako je složena

① $x^2+xy+y^2=6 \Big/ \frac{d}{dx}$ navedba da se diferencira po x, naći izvod funkcije

$2x+1\cdot y+xy'+2y\cdot y'=0$ Na ovaj način zapisano na desnoj strani izraz y'

$y'(x+2y)=-2x-y$

$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$ kad izvod zavisi od y, ali y'

② $2^x+2^y=2^{x+y}$ - izvod - y je pred. napisano preko x i y, a nije samo po y, tad je napisano implicitnom obliku

$2^x\ln 2+2^y\ln 2\cdot y'=2^{x+y}(1+y')\ln 2 \,/ :\ln 2$

$2^x+2^y\cdot y'=2^{x+y}+2^{x+y}\cdot y'$ - treba voditi na desnoj koji sadrže y', a to izraz

$y'(2^y-2^{x+y})=2^{x+y}-2^x$

$y'=\frac{2^{x+y}-2^x}{2^y-2^{x+y}}$

③ $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'\cdot x-y\cdot x'}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'$$

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'x-yx'}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(2x+2y\cdot y'\right)$$

$$\frac{y'x-y}{x^2+y^2} = \frac{1}{\cancel{2}(x^2+y^2)}\,\cancel{2}(x+yy') \Big/ x^2+y^2$$

$$y'x-y = x+yy'$$

$$y'(x-y) = x+y$$

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

Zadania:

③ $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$

④ $x=\operatorname{arctg}(x+y)$

⑤ $e^y+xy=e.$

⑥ $x\ln y-y\ln x=1$

⑦ $xy=\operatorname{tg} y$

Logaritamski izvod

Ako imamo funkciju oblika $y = f(x)^{g(x)}$ kada imamo x i dolje i gore

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$$

$$\ln y = \underbrace{g(x)\ln f(x)}_{\text{logaritam stepena}} \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = g'(x)\cdot \ln f(x) + g(x)\cdot \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) \Big/ \cdot y$$

$$y' = y\cdot\left[g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right]$$

$$y' = f(x)^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\, f(x) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right]$$ ovaj postupak raditi

1. $y = x^x$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x\ln x \Big/ \frac{d}{dx}$$ → naći izvod lijeve i desne strane po x

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} \Big/ \cdot y$$

$$y' = y(\ln x + 1)$$

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

Za vježbu

(2) $y = (\ln x)^x$

(3) $y = x^{\frac{1}{x}}$

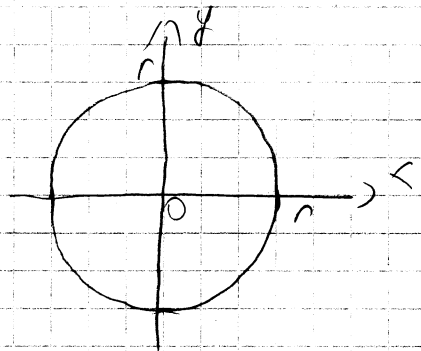
(4) $y = (\sin x)^{\cos x}$ — prvo logaritmovati pa izvod

(5) $y = x^{x+1}\cdot(x+1)^x$ — prvo primijeniti log proizvoda pa log stepena

IZVOD PARAMETARSKI ZADANE FUNKCIJE

Pr.) $x^2+y^2=r^2$ - implicitni oblik

$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ → eksplicitni oblik ako izrazim y preko x



Parametar se najčešće označava sa slovom t.

parametarski oblik za ovu kružnicu bio bi:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

, ako uvrstimo x i y u ovo, imam $x^2+y^2=r^2$

Neke parametarske funkcije se ne mogu napisati u eksp. i implicitnom obliku.

U općem slučaju, ako je $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ — izvod y po t / izvod x po t

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \dot{y} \\ \frac{dx}{dt} &= \dot{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}}$$

da bi se razlikovali izvodi, kada pišemo izvod x po t označavamo $\dot{x}$ a $y = y'$

Pr.) 1. $\begin{cases} x=a\cdot(t-\sin t) \\ y=a\cdot(1-\cos t) \end{cases}$

$y' = \dfrac{a\cdot \sin t}{a\cdot(1-\cos t)}$ - izvodi

$y' = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ — preko dvostrukog ugla

$y' = \dfrac{\cancel{2}\,\cancel{\sin\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}}{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}}\frac{t}{2}}$

$y' = \dfrac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$

$y' = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$

Za vježbu:

2) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = b\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$

DIFERENCIJABILNOST FUNKCIJE

- je funkcija ako postoji izvod u toj tački

Ako postoji: $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, ako postoji izvod:

ako je konačan (broj) kažemo da je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna u tački $x = x_0$.

Lijevi izvod funkcije $f(x)$ u tački $x = x_0$ označit ćemo

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Desni izvod funkcije $f(x)$ u $x = x_0$

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Potrebni i dovoljan uslov za diferencijabilnost funkcije $f(x)$ u tački $x = x_0$:

Postoje $f'(x_0+0)$ i $f'(x_0-0)$, konačni su i jednaki.

- Potreban uslov za diferencijabilnost funkcije $f(x)$ u $x = x_0$ je da $f(x)$ bude neprekidna u toj tački

Ako funkcija nije neprekidna nije diferencijabilna, ali ako je funkcija neprekidna možda nije i diferencijabilna.

1. Ispitati diferencijabilnost funkcije

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

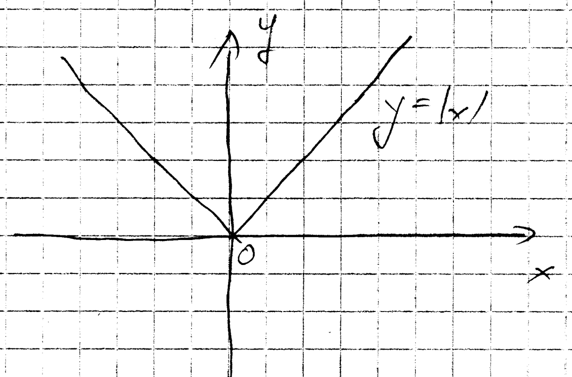
c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

yerka

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x^2}{x} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

u tački $x=0$

a) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



funkcija, očito neprekidna

upotrijebit ćemo potrebni i dovoljan uslov

$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$f'(0+0) = 1$

$f'(0-0) = -1$

nisu jednaki, nije ispunjen potrebni i dovoljan uslov, što znači da nije diferencijabilna

$\Rightarrow f'(0)$ ne postoji

Špic V Λ i

Špic se pojavljuje u tačkama u kojima je funkcija definisana i neprekidna, a u kojima ne postoji prvi izvod.

i šiljko isto ima isti oblik, tako da ni lijevi i desni izvod isti u ovim tačkama

b) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

teži beskonačnosti od 0

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \sin \frac{1}{h} - 0}{\cancel{h}}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \sin \frac{1}{h}$ ne postoji ($\frac{1}{x}$, $x \to 0$, pa ne postoji)

funkcija nije diferencijabilna u 0

kod [illegible] ograničenja [illegible] zato da ovo [illegible] istom brzinom

c) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{\cancel{h}}$

0 · ne postoji

$= \lim\limits_{h \to 0} h \cdot \sin \frac{1}{h} = 0$, jer ako posmatramo $0 \le \left| h \sin \frac{1}{h} \right| \le |h| \to 0$

Ova funkcija jest diferencijabilna

Zaključak: Funkcija je diferencijabilna u $x=0$

(2.) Odrediti konstante $a, b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 0 \\ (x+a) \cdot e^{-bx}, & x < 0 \end{cases}$$

bude neprekidna i diferencijabilna u tački $x=0$

ovo se podrazumijeva
može se izostaviti tekst, a to se podrazumijeva iz pitanja

Najprije ćemo postaviti zahtjev da funkcija bude neprekidna u tački $x=0$.

to je za x koji su manji od 0

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} (x+a)\cdot e^{-bx} = a e^{0} = a$$

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} (ax^2+bx+1) = 1$$

$$\Rightarrow \underline{a = 1}$$

znači da će biti diferencijabilni u nim tačkama

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax+b, & x>0 \quad \text{desno uvek} \\ e^{-bx} + (x+a)\, e^{-bx}(-b), & x<0 \quad \text{izvod proizvoda} \end{cases}$$

$$= e^{-bx}(1-bx-ba)$$

$$f'(0-0) = e^{0}(1-ba) \overset{a=1}{=} 1-b$$

$$f'(0+0) = b$$

moraju biti jednaka

$$\Rightarrow \quad 1-b = b$$

$$1 = 2b$$

$$b = \frac{1}{2}$$ mora se proveriti i neprekidnost

(3.) Odrediti konstante a, b, c tako da funkcija $f(x)=$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+c, & x<0 \\ x^2+x+1, & 0 \le x \le \pi \\ ax^2+b\sin x+c, & x>\pi \end{cases}$$ bude diferencijabilna za sve $x \in \mathbb{R}$.

Uslovi su lim u 0 i π, radi neprekidnosti, i isti su uslovi u 0 i π diferencijabilnosti

PRIMJENA IZVODA

lopital

L' Hospitalovo pravilo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$a \in R$ ili $a = \pm\infty$

a može biti broj ili $\pm\infty$

Pr./

[illegible] u točki pogledati za $x \to 1$

1) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x - 1}{x^7 - 4x + 3} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{L.P.}{=} \lim_{x\to 1} \frac{5x^4 - 12x^3 + 4x + 1}{7x^6 - 4} = \frac{-2}{3}$$

2) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x - 1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) \overset{L.P.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x+3} \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

gledamo najveći stepen $+\infty$

nakon više puta uzastopno koristiti lopitalovo pravilo

$$\overset{L.P.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

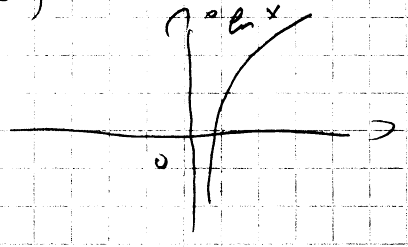
3) $$\lim_{x\to +\infty} x \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \infty \cdot 0$$

neodređeni oblik, ali ne može se koristiti L'Opitalovo pravilo, može se koristiti ali nakon što se svede na jedan od ova dva oblika, naime

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{L.P.}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{x}\right)'}}{\cancel{\left(\frac{1}{x}\right)'}} = e^0 = 1$$

$\ln x \to (-\infty)$



(4.) $\lim\limits_{x\to 0_+} x\ln x = 0\cdot(-\infty)$

$= \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \dfrac{-\infty}{+\infty}$

$\overset{LH}{=} \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} = 0$

(5.) $l = \lim\limits_{x\to 0_+} x^x \quad (0^0)$

$\ln l = \ln \lim\limits_{x\to 0_+} x^x$

$\ln l = \lim\limits_{x\to 0_+} \ln x^x$

$\ln l = \lim\limits_{x\to 0_+} x \ln x \overset{\text{z 4. przykł. 4}}{=} 0$

$\ln l = 0 \Rightarrow l = e^0 = \underline{1}$

(6.) $l = \lim\limits_{x\to 0_+} (x+e^x)^{\frac{1}{x}} \quad (1^\infty)$

$\ln l = \ln \lim\limits_{x\to 0_+} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

$\ln l = \lim\limits_{x\to 0_+} \ln (x+e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{1}{x}\ln(x+e^x) = \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\ln(x+e^x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{LH}{=} \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\frac{1}{x+e^x}\cdot(1+e^x)}{1} = \frac{1}{1}\cdot(1+1) = 2$

$\ln l = 2$

$\boxed{l = e^2}$

Za vježbu:

a) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin\sqrt{\sin x}}{\sqrt{2x-x^2}}$

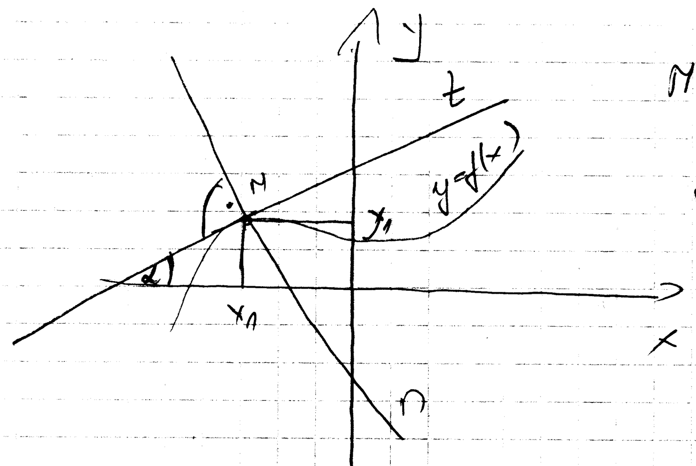
c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n \cdot e^{-x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

f) $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ 0 eksponencijalni oblici, $\lim = e$ i raditi $0, \infty, f'$

JEDNAČINA TANGENTE I NORMALE

NA KRIVU



$M(x_1, y_1)$ - dodirna tačka

$y_1 = f(x_1)$

t - tangenta, n - normala (okomita u dodirnoj tački i prolazi kroz nju)

$y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$ - jednačina prave kroz tačku M

x_1 i y_1 - fiksni brojevi

$k_t = f'(x_1)$, $k_n = -\dfrac{1}{k_t} = -\dfrac{1}{f'(x_1)}$ uslov okomitosti

uslov paralelnosti $k_1 = k_2$

$k_t = \operatorname{tg}\alpha$

1.) Naći jednačinu tangente i normale na datu krivu u tački sa zadanom ~~apscisom~~ apscisom.

a) $y = x^3 - 2x + 5, \quad x_1 = 1$

za vježbu

b) $y = (tg\,x)^{ctg\,x}, \quad x_1 = \frac{\pi}{4}$ (logaritamski način)

a) $y_1 = 1^3 - 2\cdot 1 + 5 = 4$

$y' = 3x^2 - 2$

kada je funkcija data implicitno funkcija izraza preko x i y, a ovdje samo y po x itd.

$y'(1) = 3 - 2 = \underline{1}$

$\boxed{k_t = 1} \Rightarrow \boxed{k_n = -1}$

jednačina tangente

$t: \; y - 4 = 1\cdot(x-1)$

$\underline{y = x + 3}$

$n: \; y - 4 = -1\cdot(x-1)$

$y - 4 = -x + 1$

$\underline{y = -x + 5}$

2. Napisati jednačinu normale na krivu $y = x\ln x$ koja je paralelna pravoj $2x - 2y + 3 = 0$.

koordinate možemo znati

Neka je tačka $M(x_1, y_1)$ - dodirna tačka

$2x - 2y + 3 = 0$

$2x + 3 = 2y$

$y = \frac{2x+3}{2}$

$y = \frac{2x}{2} + \frac{3}{2}$

tražimo koordinate dodirne tačke, jer je ono jednako 1-modu u dodirnoj tački

$\underline{y = \cancel{x +} \frac{3}{2}} \Rightarrow \cancel{k = 1} \Rightarrow k_n = 1 \Rightarrow k_t = -\frac{1}{k_n} = -1$

paralelne

$y' = (x \ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$y' = \ln x + 1$

$k_t = \ln x_1 + 1$

dobijemo kada uvrstimo 1

$\ln x_1 + 1 = -1$

$\ln x_1 = -2$

$\Rightarrow x_1 = e^{-2}$

$y_1 = e^{-2} \ln e^{-2} = -2e^{-2}$

$n: y + 2e^{-2} = 1(x - e^{-2})$

$y + 2e^{-2} = x - e^{-2}$

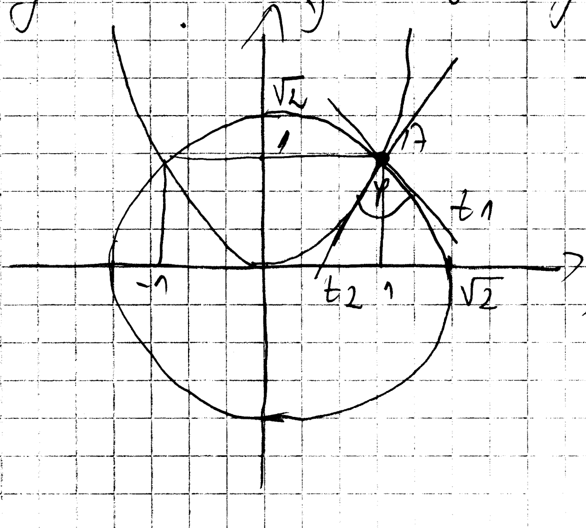
$\underline{y = x - 3e^{-2}}$

3. Nađi kut među krivih

a) $x^2 + y^2 = 2$
$y = x^2$

b) vježba $y = x^2$
$9x^2 + 16y^2 = 25$

c) vježba $\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases}$



$\varphi = \measuredangle(t_1, t_2)$

Kut među dvije krive, kut među dvije prave (tangente)

$tg\,\varphi = \frac{t_2 - t_1}{1 + t_1 t_2}$

$y+y^2=2$ $\quad\quad$ $x^2=y \Rightarrow y\geq 0$ (jer je $y^2\geq 0$)

$y^2+y-2=0$ $\quad$ pa je $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$y_1=-2$, $\boxed{y_2=1}$

ovo otpada

$x^2+y^2=2 \Big/ \frac{d}{dx}$ primjenit diferencijalni izraz

$2x+2y\cdot y'=0 \ /:2$

$x+y\cdot y'=0$

$yy'=-x \Rightarrow y'=\frac{-x}{y}$

Ubacimo ove koordinate

Kružnica u $A(1,1)$ je $k_1=\frac{-1}{1}=-1$

parabola

$y=x^2 \Rightarrow y'=2x$

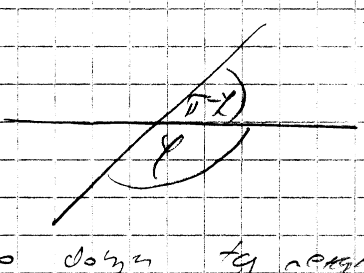
u $A(1,1)$ je $k_2=2\cdot 1=2$

$tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$

$tg\,\varphi=\frac{2-(-1)}{1+2\cdot(-1)}=\frac{3}{-1}=-3$

Ako se pravce ne sijeku pod pravim uglom

Ako se sijeku pod pravim uglom nazivnik je 0



$\varphi=arctg(-3)=-arctg\,3$

$\Rightarrow \pi-\varphi=arctg\,3$

Ako dobijem tg negativan onda ugao

je tupi ugao

Za vježbu:

(4.) Na krivu $y = x^2 - 1$ postaviti normalu koja je

a) paralelna pravoj $n \parallel y = x + 1$

b) okomita na pravu $\perp y = -x$

22.12.2009. god

IZVODI VIŠEG REDA, TAYLOROVA I MACLAURINOVA FORMULA

$$y = f(x) \Rightarrow y'' = [f'(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$y''' = (y'')'$$

Oznake: $y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}, y^{(6)}, y^{(7)}, \ldots$

$y^{(0)} = y$ nulti izvod je sama funkcija

npr: a) $y = e^x$

$y' = e^x$

$y'' = e^x$

$\vdots$

$y^{(n)} = e^x$

b) $y = \sin x$

$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$y'' = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$

$y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

$y^{IV} = \sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin\left(x + \frac{4\pi}{2}\right)$

$\vdots$

$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

vježba

c) $y = \cos x$

d) $y = \ln(1+x)$

$y' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$y'' = -(1+x)^{-2}$

$y''' = -(-2)\cdot(1+x)^{-3} = 2(1+x)^{-3}$

$y^{IV} = -6(1+x)^{-4}$

$y^{V} = 24\cdot(1+x)^{-5}$

$\vdots$

$y^{(n)}$

$y' = 0!\,(1+x)^{-1}$

$y'' = -1!\,(1+x)^{-2}$

$y''' = 2\cdot(1+x)^{-3}$

$y^{IV} = -3!\,(1+x)^{-4}$

$\vdots$

$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,(1+x)^{-n}$

e) $y = (1+x)^{m}$ – prirodan m, $m \in N$ treba naći n-ti izvod

Taylorova formula: je formula kojom se funkcija $f(x)$ prikazuje u obliku reda

1) $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),\ x \to a$

Kažemo da je u jednakosti (1) funkcija $f(x)$ razvijena u red u okolini tačke $x = a$

Ako u relaciji (1) stavimo da je $a = 0$ dobiva se Maclaurinova formula

(2) $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + o(x^n),\ x \to 0$

NAUČI!!!

1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$

2) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$

3) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R})$

4) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} \quad x \in (-1, 1)$

BINOMNI RAZVOJ

5) $(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n \quad (m \in \mathbb{R}) \quad x \in (-1,1)$

$\binom{m}{n}$ — gornji ne mora biti cijeli, niti mora biti prirodni, može se računati sa bilo kojim, ne može se računati $\sqrt{2}$, $2!$, jer ne postoje faktorijeli

donji mora biti prirodan broj

$$\binom{m}{n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdots (m-n+1)}{n!}$$

(1.) Funkciju $y = \sqrt{x}$ razviti u red po stepenima izraza $x-1$ do člana koji sadrži $(x-1)^2$

Ako se traži po stepenima od $x-1$ ($x+1$) to je Taylorov, a ako je x onda je Maclaurinov

$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(1) = \sqrt{1} = 1 \quad (a = 1)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

$f''(x) = \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-3/2} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{4}$

$\sqrt{x} \overset{(1)}{=} 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{\frac{1}{4}}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

vježba.

(2.) Funkciju $f(x)=e^{x}$ razviti u red po stepenima izraza $x+1$ do člana koji sadrži $(x+1)^3$

$x+1 = x-(-1) \Rightarrow a=-1$ (nađi izvod i uvrstiti -1)

$f(-1)$
$f'(-1)$
$f''(-1)$
$f'''(-1)$ i uvrstiti u formulu

(3.) Razviti u Maclaurinov red funkciju

rješenje raditi po def: koristiti gotove formule

a) $y=\frac{1}{1+x}$

I način:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n} = 1+q+q^{2}\dots = \frac{1}{1-q}, \quad q\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-\underbrace{(-x)}_{q}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n}$$

II način: pomoću binomnog razvoja

– može se transformisati

koliko je faktora u nazivniku toliko ih i u brojniku

$$y=(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}x^{n}$$

$$\binom{-1}{n} = \frac{-1(-1-1)(-1-2)\dots(-1-n+1)}{n!} = \frac{-1(-2)(-3)\dots(-n)}{n!}$$

$$=\frac{(-1)^{n}\cdot \cancel{1\cdot2\cdot3\cdots n}}{\cancel{n!}} = (-1)^{n}$$

$$\Rightarrow (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n}$$

b) $y = \sqrt{1+x^2}$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n-3)!!}{(2n)!!} \cdot x^{2n}$$

ovo ispravi

$$y = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \overset{(5)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (x^2)^n$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \qquad \frac{3}{2}-n = \frac{3-2n}{2} = -\frac{(2n-3)}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-3}{2})}{n!} = \frac{\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n}}{n!}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\cdot(2n-3)!!}{2^n n!}$$

$$\sqrt{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (x^2)^n$$

$$n=0 \Rightarrow \binom{\frac{1}{2}}{0}(x^2)^0 = 1$$

$$n=1 \Rightarrow \binom{\frac{1}{2}}{1}(x^2)^1 = \frac{1}{2}x^2$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot(2n-3)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

Pokazati $2^n \cdot n! = (2n)!!$ Vrijedi:

c) $y = \ln(10+x)$

$$y = \ln 10(1+\frac{x}{10})$$

$$y = \ln 10 + \ln(1+\frac{x}{10})$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,1) \qquad \text{Treba pisati interval}$$

$$y = \ln 10 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\left(\frac{x}{10}\right)^n}{n} = \ln 10 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{10^n \cdot n}, \quad x \in (-10,10)$$

$$-1 < \frac{x}{10} < 1 \; / \cdot 10$$

$$-10 < x < 10$$

d) $y = x^2 + x + 51 + \sqrt{1+x^2}$ polinom u funkciji koju treba razvijati, ovo se prepiše, a ovo se razvije, dakle

$$y = x^2 + x + 51 + 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \dots$$

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + x + 52 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!} \cdot x^{2n}$$

e) $y = \frac{1}{x^2-x-2}$

$$x^2 - x - 2 = x^2 - x - 2x - 2 = x(x+1) - 2(x+1) = (x+1)(x-2)$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} \quad / \cdot (x+1)(x-2)$$

$$1 = a\cdot(x-2) + b\cdot(x+1)$$

$$x = 2 \Rightarrow 1 = 3b \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = a\cdot(-3) \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{-2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = /\, q = \frac{x}{2} \,/$$

gdje je oblik $1-q$

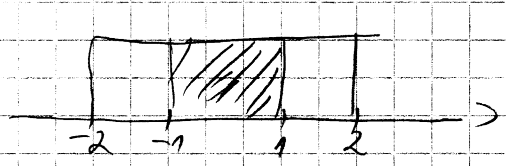
$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n,$$ to važi ako je $-1 < \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow$

$$-2 < x < 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x+1} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

$$y = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right)$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n\left[-\frac{1}{2^{n+1}} - (-1)^n\right], \quad \text{ako } x \in (-1,1)$$



može naći presjek

f) kraći!!!!!

$$y = \frac{x}{x^2-4}$$

g) $y = \sin^2 x$ ako dobijemo sin, ili cos na 2, 3, moramo preko formula za upotr.

$$y = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\cancel{2}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{\cancel{2n}\,2n-1}\cdot x^{2n}$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n-1}\cdot x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

h) $y = \cos^2 x$ uputa $\left(y = \frac{1+\cos 2x}{2}\right)$

i) $y = \sin^3 x$

j) $y = \cos^3 x$

$y = \ldots$

$$\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cdot\cos x + \sin x \cos 2x$$

$$= 2\sin x\cos^2 x + \sin x\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= 2\sin x\cdot(1-\sin^2 x) + \sin x\cdot(1 - 2\sin^2 x)$$

$$= 3\sin x - 4\sin^3 x$$

dalje se rastavlja

$$\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x \Rightarrow \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

2 način: $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ $\quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

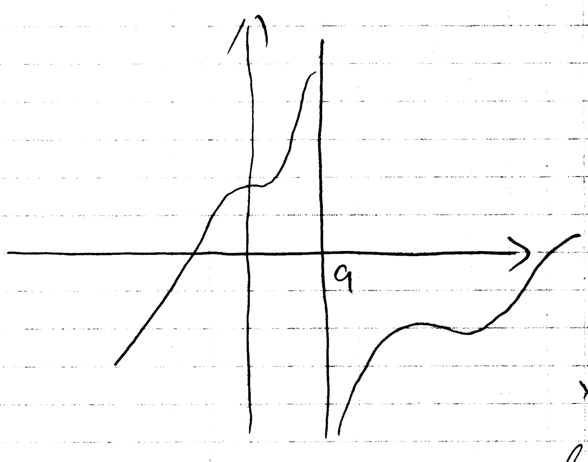
k) $y = \sqrt[5]{8 - x^3}$

ASIMPTOTE

- je prava koja ima osobinu kad se grafik nekoj funkcije približava toj pravoj, tu udaljenost je sve manja i manja.

- vertikalne $x = a$ (a = constanta)
- horizontalne $y = b$ (b = constanta)
- kose $y = kx + n$ (k, n = constanta, $k \neq 0$)

vertikalna asimpt.



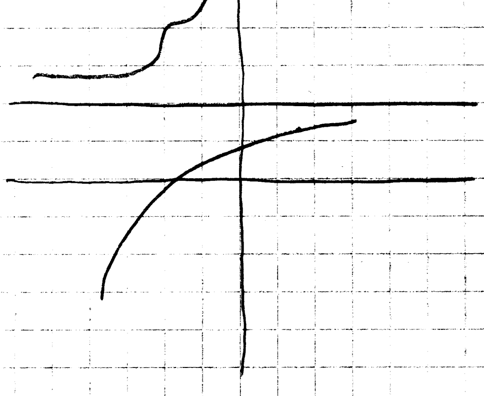
koja će biti potencijalna tačka prekida

i računamo lijevi i desni limes

$\lim_{x \to a_-} f(x) = \pm \infty$

$\lim_{x \to a_+} f(x) = \pm \infty$

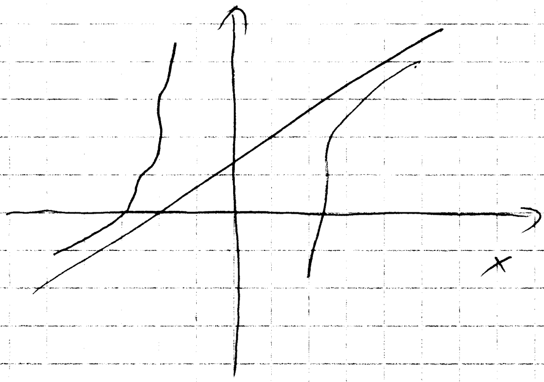
horizontalna asimptot



ako je b neka koja postoji horizontalni limes mora biti konačan broj.

$\lim_{x \to \pm \infty} f(x) = b$

$b = \pm \infty \Rightarrow$ nema hor. asimptota



$y = kx + n$

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right)$

$k = 0,\ k = \pm\infty,\ n = \pm\infty \Rightarrow$ nema kose asimptote

racionalna funkcija, možemo prvo odrediti Domenu i znak iste funkcije

1) $y = \dfrac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x - 6}$

$x^2 - x - 6 = 0$

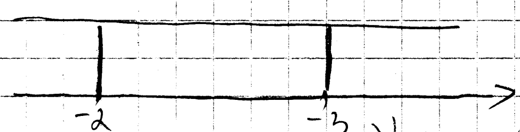
D.P $\quad x^2 - x - 6 \neq 0$

$D = 25$

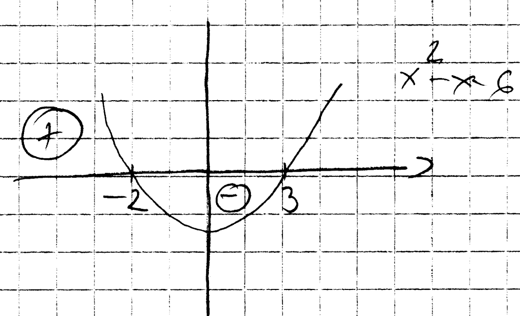
$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$

$x \neq 3 \wedge x \neq -2$

$x_1 = 3,\ x_2 = -2$



treba dobiti $(-2, 3)$



$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x - 6} = \dfrac{6}{0} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x - 6} = \dfrac{6}{0_-} = -\infty$

V.A. $x = -2$

da bi postojala V.A. treba da bude lijevi ili desni limes ∞

$$\lim_{x\to 3_-} \frac{2x^2+x-4}{x^2-x-6} = \frac{17}{0_-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3+} \frac{2x^2+x-4}{x^2-x-6} = \frac{17}{0+} = +\infty$$

$\Rightarrow$ V.A $x=3$

najčešće se ustanovljavaju limesi, ako racionalna funkcija
oni se istovremeno ...

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x-4}{x^2-x-6} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

H.A. $y=2$

Kada imamo i $\pm\infty = 2$ tada nema K.A.

Kada dobijemo horizontalnu asimptotu u oba smjera, tada

K.A. nema

kada je pod $\sqrt{\ }$ neka veličina mora biti ≥ 0

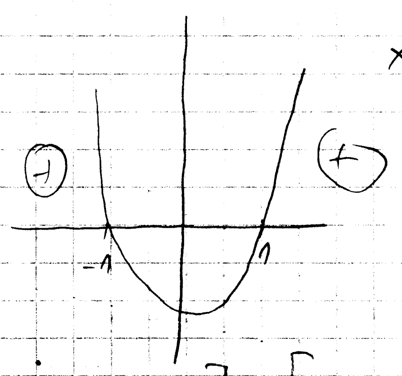
(2.) $y = x + \sqrt{x^2-1} - \dfrac{1}{x^2+2x}$

D.P $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2+2x \neq 0 \end{cases}$

$x^2-1=0$

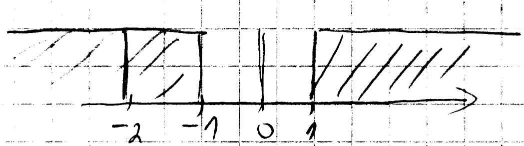
$x^2=1$

$x=\pm 1$



$x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

$x\cdot(x+2) \neq 0 \Rightarrow x\neq 0 \wedge x\neq -2$

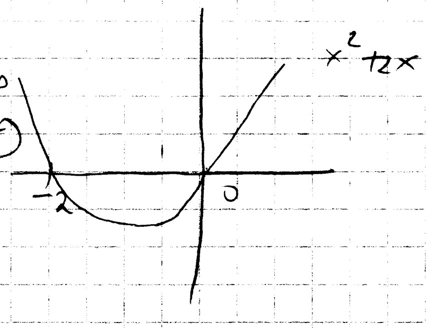


kada su uključeni, nemamo računati V.A

$x \in (-\infty,-2) \cup (-2,-1] \cup [1,+\infty)$

jedini kandidat je -2

$$\lim_{x\to -2_-} y = -2+\sqrt{3} - \frac{1}{0_+} = -\infty$$



$$\lim_{x\to -2_+} y = -2+\sqrt{3} - \frac{1}{0_-} = +\infty$$

V.A. $x=-2$

$\sqrt{\ }$ mora biti pozitivan

neodređeno promatrati

jedini teži $\to 0$ $\quad (+\infty+\infty) = +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \Big(\underset{\infty}{x} + \underset{\infty}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x^2+2x} \Big) = +\infty$$

$-\infty+\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} \Big(\underset{-\infty}{x} + \underset{+\infty}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x^2+2x} \Big) = \left| \begin{matrix} x=-t \\ t\to+\infty \end{matrix} \right|$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(-t+\sqrt{t^2-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}+t}{\sqrt{t^2-1}+t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2-1}\right)^2-t^2}{\sqrt{t^2-1}+t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\cancel{t^2}-1-\cancel{t^2}}{\underset{\infty}{\sqrt{t^2-1}}+\underset{\infty}{t}} = \frac{-1}{\infty} =$$

uvjet najbitniji

H.A. $y=0 \quad (x\to-\infty)$

kada x teži $+\infty$

K.A. $y=kx+n$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{x^2+2x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$$

$$= 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 2$$

$\underline{k=2}$ ako je različito od nule računamo n

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{x^2+2x} - 2x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$$

isti limes kao prethodni

K.A. $y=2x \quad (x\to+\infty)$

Za vježbu:

3) $y = \frac{x^3}{2x^2+5}$ 4) $y = x e^{\frac{1}{x}}$

5) $y = \frac{1}{3-x} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$ 6) $y = -x e^{\frac{x+1}{x-3}}$

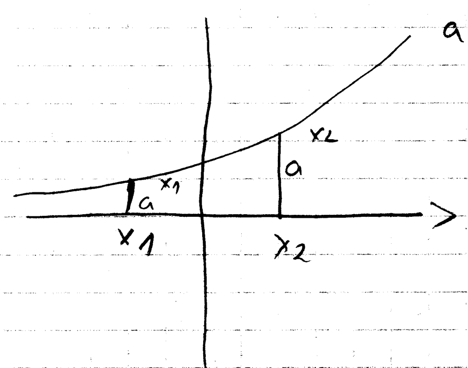
RAST I OPADANJE FUNKCIJE, EKSTREMI

Def: Ako $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ to znači da je $f(x)$ f-ja rastuća i koristi se oznaka $f \nearrow$

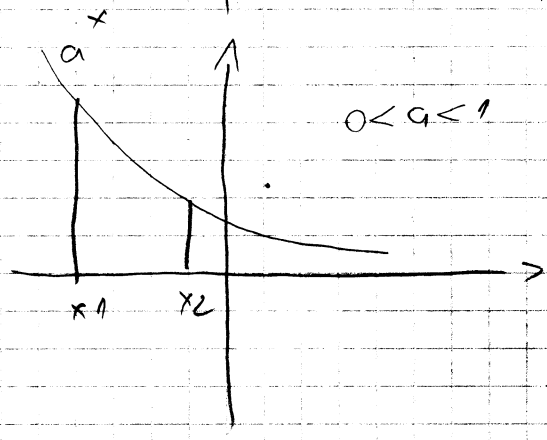
ako $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ znači da je $f(x)$ opadajuća i oznaka je $f \searrow$

Specijalni slučaj uvijek $\nearrow$ i uvijek $\searrow$, monotono $\nearrow (\searrow)$

Pr. monotono rastuće funkcije

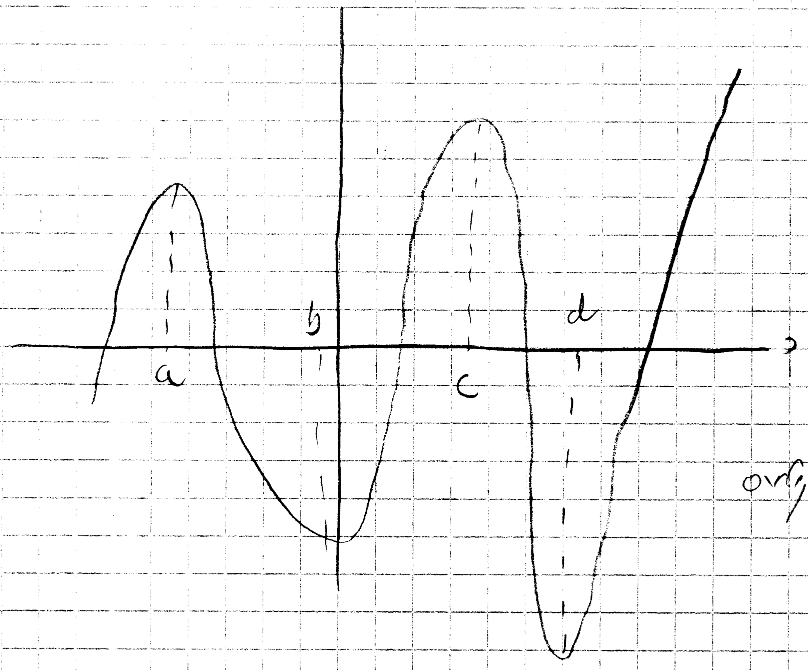


a^x $a > 1$, rastuća (jer je $a^{x_1} < a^{x_2}$)



$0 < a < 1$ opadajuća

Pr. funkcija raste i opada više puta



ovdje se utvrđuje interval rasta i opadanja

Intervali rasta: $(-\infty, a)$ (b, c) $(d, +\infty)$
Intervali opadanja (a, b) (c, d)

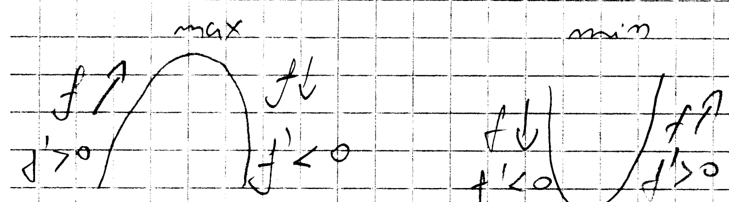
tačke u kojima se smjenjuju opadanje i rast su zanimljive

a, b, c, d - lokalni ekstremi
- lokalni minimum: $x = b$, $x = d$
- lokalni maximum: $x = a$, $x = c$

Teorem: Tamo gdje je prvi izvod pozitivan funkcija će biti rastuća,
izvod negativan -//- opadajuća

$f' > 0 \Rightarrow f \nearrow$
$f' < 0 \Rightarrow f \downarrow$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x$ je stacionarna tačka



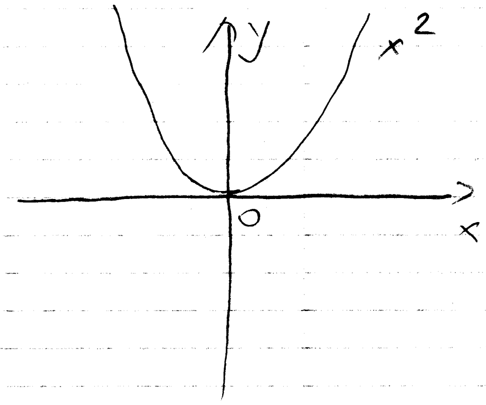
kada je beskonačno mnogo tačaka f' = isti broj
onda treba napraviti analizu znaka

Pr: Posmatrajmo kvadratnu funkciju $y=x^2$ i kubnu $y=x^3$

$y = x^2$

$y' = 2x$ – može biti pozitivan, negativan

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

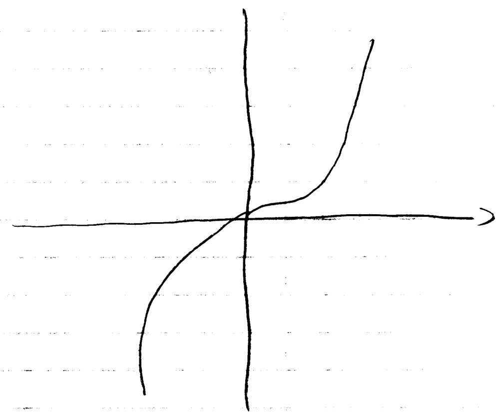


Min $(0,0)$

$y = x^3$

$y' = 3x^2$ – uvijek je pozitivan ako $x \neq 0$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$



$O(0,0)$, nije ekstrem

Ne može biti ekstrem ako je prvi izvod uvijek istog znaka

(1) Odrediti intervale ~~konveksnosti~~ monotonosti i ~~konkavnosti~~ ekstreme funkcije

a) $y = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$

b) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

c) $y = xe^{2x}$

prvo se traži y' pa se izjednačava sa 0

a) $y' = 3x^2 + 6x - 72$

$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 72 = 0 \quad /:3$

$x^2 + 2x - 24 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{2} = \dfrac{-2 \pm 10}{2}$

$\underbrace{x_1 = 4, \quad x_2 = -6}_{\text{stacionarne tačke}}$

$y' = 3(x^2+2x-24)$

$y' = 3\cdot(x-4)\cdot(x+6)$

	$-\infty$ -6	-6 4	4 $+\infty$
$x-4$	$-$	$-$ 0	$+$
$x+6$	$-$ 0	$+$	$+$
y'	$+$	$-$	$+$
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	max	min	

da je $\nearrow\nearrow$ ili $\searrow\searrow$ nema ekstrema

$y(-6) = (-6)^3 + 3\cdot(-6)^2 - 72\cdot(-6) + 90$

$= -216 + 108 + 432 + 90$

$= 414$

Točka max $(-6, 414)$

$y(4) = 4^3 + 3\cdot 4^2 - 72\cdot 4 + 90$

$= 64 + 48 - 288 + 90$

$= -86$

Točka min $(4, -86)$

2 način: ako je y' uvijek pozitivna onda samo funkcija raste

$y'' = 6x+6$

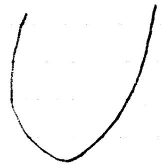
$y''(-6) = 6\cdot(-6)+6 = -30 < 0 \Rightarrow \max(-6, 414)$

ako je y'' pozitivna to je min.

$y''(4) = 6\cdot 4 + 6 = 30 > 0 \Rightarrow \min(4, -86)$

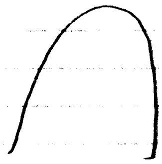
29. 12. 2009. god.

KONVEKSNOST, KONKAVNOST, PREVOJNE TAČKE



konveksna

$y'' > 0$, 2. izvod pozitivan



konkavna

$y'' < 0$, 2. izvod negativan

Prevojna tačka je tačka na grafiku funkcije u kojoj grafik prelazi iz konveksnog u konkavni oblik ili obrnuto.
Ako je $P(x_1, y_1)$ prevojna tačka tada je drugi izvod jednak 0. $y''(x_1) = 0$

1. Odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti, te prevojne tačke funkcije:

a) $y = \frac{x}{x^2+3}$ b) $y = \frac{x^4}{x^3-1}$ (zadaća) c) $y = x e^{1-x}$ (zadaća)

a) $y' = \frac{x^2+3-x\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3-2x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$

izvod složene funkcije

$$y'' = \frac{-2x(x^2+3)^2 - (3-x^2)\cdot 2(x^2+3)(x^2+3)'}{(x^2+3)^4}$$

$$= \frac{-2x\cancel{(x^2+3)}\cdot[x^2+3+2\cdot(3-x^2)]}{(x^2+3)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2x(x^2+3+6-2x^2)}{(x^2+3)^3} = \frac{-2x(9-x^2)}{(x^2+3)^3}$$

$y'' = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ili $9 - x^2 = 0$

$\Downarrow$

$x^2 = 9$

$x_{2,3} = \pm 3$

	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$-2x$	+	+ 0	−	−	
$9-x^2$	− 0	+	+ 0	−	
y''	−	+	−	+	
y	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	
	P.T.	P.T.	P.T.		

mora biti jedno = 0

jedan od faktora [illegible] jednog na drugi oblik

da je npr. $\cap\cap$ $\cup\cup$ nema prevojne točke

$$y(-3) = \frac{-3}{9+3} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

$$y(0) = 0$$

$$y(3) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$P_1\left(-3, -\frac{1}{4}\right)$

$P_2(0,0)$ prevojne točke

$P_3\left(3, \frac{1}{4}\right)$

racionalne, eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske

ISPITIVANJE FUNKCIJE I CRTANJE GRAFIKA

RASPORED:

1. Definiciono područje (ili domena funkcije)
2. Parnost, neparnost funkcije (kod parne grafik simetričan na os y, kod neparne funkcije simetričan u odnosu na koordinatni početak)
3. Presjeci grafika s koordinatnim osama
   a) Nule funkcije
   b) Presjek grafika i y-ose
4. Znak funkcije (na kojim intervalima je funkcija pozitivna, na kojim negativna)
5. Asimptote
6. Prvi izvod funkcije i primjena (rast i opadanje i ekstremi)
7. Drugi izvod i primjena (prevojne točke,
8. Grafik

Racionalna funkcija

1.

$$y=\frac{3x^3-2x}{x^2-1}$$ kod rac. funk. nazivnik različit od 0

Definic. pod. $x^2-1\neq 0$

$x^2\neq 1$

$x^2\neq \pm 1$

$x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

Parnost neparnost Uvrštava se $y(-x)$, ako se dobije $y(x)$, parna, i 3 slučaj: ni parna ni neparna

$$y(-x)=\frac{3(-x)^3-2(-x)}{(-x)^2-1}=\frac{-3x^3+2x}{x^2-1}=-\frac{3x^3-2x}{x^2-1}=-y(x)$$

~~funkcija je neparna~~

Ishodište je [illegible] sa 0

Nule:

$3x^3-2x=0$

$x(3x^2-2)=0$

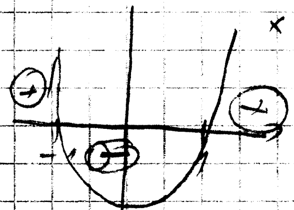
$x_1=0 \qquad 3x^2=2$

$x^2=\frac{2}{3} \Rightarrow x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

kada je prva od [illegible] $\frac{2}{3}\neq 0$, tada je sigurno presjek 0, ne mora se računati druga stvar, uzme se u općem slučaju, da je $x=0$.

Znak: $-1 \quad -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad 0 \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \quad 1 \quad +\infty$

x	$-$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	$+$
$3x^2-2$	$+$	$+$ 0	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
x^2-1	$+$ 0	$-$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$
y	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$



Asimptote:

$$\lim_{x\to -1_-}\frac{3x^3-2x}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1_+}=\frac{3x^3-2x}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=+\infty$$

V.A. $x=-1$

Provjeriti da li se slaže u tabeli

$$\lim_{x\to 1_-} \frac{3x^2-2x}{x^2-1} = \frac{1}{0_-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{3x^2-2x}{x^2-1} = \frac{1}{0_+} = +\infty$$

V.A $\underline{x=1}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3-2x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3}{\cancel{x^2}} = 3x = \pm\infty$$

nema horizontalnih asimptota

K.A. $y = kx+n$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3x^3-2x}{x^2-1}}{\frac{x}{1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}(3x^2-2)}{\cancel{x}(x^2-1)} = \frac{3x^2-2}{x^2-1} = \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^3-2x}{x^2-1} - 3x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3-2x-3x(x^2-1)}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{3x^3}-2x-\cancel{3x^3}+3x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

K.A. $y = 3x$

x	0	1
$3x$	0	3

$$y' = \left(\frac{3x^3-2x}{x^2-1}\right)' = \frac{(9x^2-2)(x^2-1)-(3x^3-2x)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{9x^4-9x^2-2x^2+2-6x^4+\ldots}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{3x^4-7x^2+2}{(x^2-1)^2}$$

$y' = 0 \Rightarrow 3x^4-7x^2+2 = 0$

$x^2 = t \Rightarrow 3t^2-7t+2 = 0$

$D = 49-4\cdot 3\cdot 2 = 25$

$$t_{1,2} = \frac{7\pm 5}{6}$$

$t_1 = 2, \quad t_2 = \frac{1}{3}$

$x^2 = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \qquad x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$

$3t^2-7t+2 = 3\cdot(t-2)\cdot\left(t-\frac{1}{3}\right) = (t-2)(3t-1)$

$3x^4-7x^2+2 = (x^2-2)(3x^2-1)$

	$-\infty$ — $-\sqrt2$	$-\sqrt2$ — $-\frac{1}{\sqrt3}$	$-\frac{1}{\sqrt3}$ — $\frac{1}{\sqrt3}$	$\frac{1}{\sqrt3}$ — $\sqrt2$	$\sqrt2$ — $+\infty$
x^2-2	+ 0	−	−	− 0	+
$3x^2-1$	+	+ 0	− 0	+	+
y'	+	−	+	−	+
y	↗	↘	↗	↘	↗

max min max min

Pošto je funkcija neparna, važi

$y(\sqrt2) = \frac{3(\sqrt2)^3-2\cdot\sqrt2}{(\sqrt2)^2-1} = \frac{\sqrt2\cdot(3\cdot2-2)}{2-1} = \sqrt2\cdot4 = 4\sqrt2$

$y\left(\frac{1}{\sqrt3}\right) = \frac{3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^3-2\frac{1}{\sqrt3}}{\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^2-1} = \frac{\frac{1}{\sqrt3}\left(3\cdot\frac13-2\right)}{\frac13-1} = \frac{\frac{1}{\sqrt3}\cdot(-1)}{-\frac23} = \frac{3}{2\sqrt3} = \frac{\sqrt3}{2}$

$T_{max}^{(1)}\left(-\sqrt2, -4\sqrt2\right)$; zbog neparnosti je $T_{min}^{(1)}\left(-\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{\sqrt3}{2}\right)$

$T_{max}^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{\sqrt3}{2}\right)$, $T_{min}^{(2)}\left(\sqrt2, 4\sqrt2\right)$

$y'' = \left(\frac{3x^4-7x^2+2}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(12x^3-14x)(x^2-1)^2-(3x^4-7x^2+2)\cdot2(x^2-1)\cdot2x}{(x^2-1)^4}$

$= \frac{2x(6x^2-7)(x^2-1)^2-4x(x^2-1)(3x^4-7x^2+2)}{(x^2-1)^4} =$

$= \frac{2x\cancel{(x^2-1)}\left[(6x^2-7)(x^2-1)-2(3x^4-7x^2+2)\right]}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}$

$= \frac{2x(\cancel{6x^4}-6x^2-7x^2+7-\cancel{6x^4}+14x^2-4)}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

$y''=0 \Rightarrow x=0$

$x^2+3>0 \quad (x\in R)$

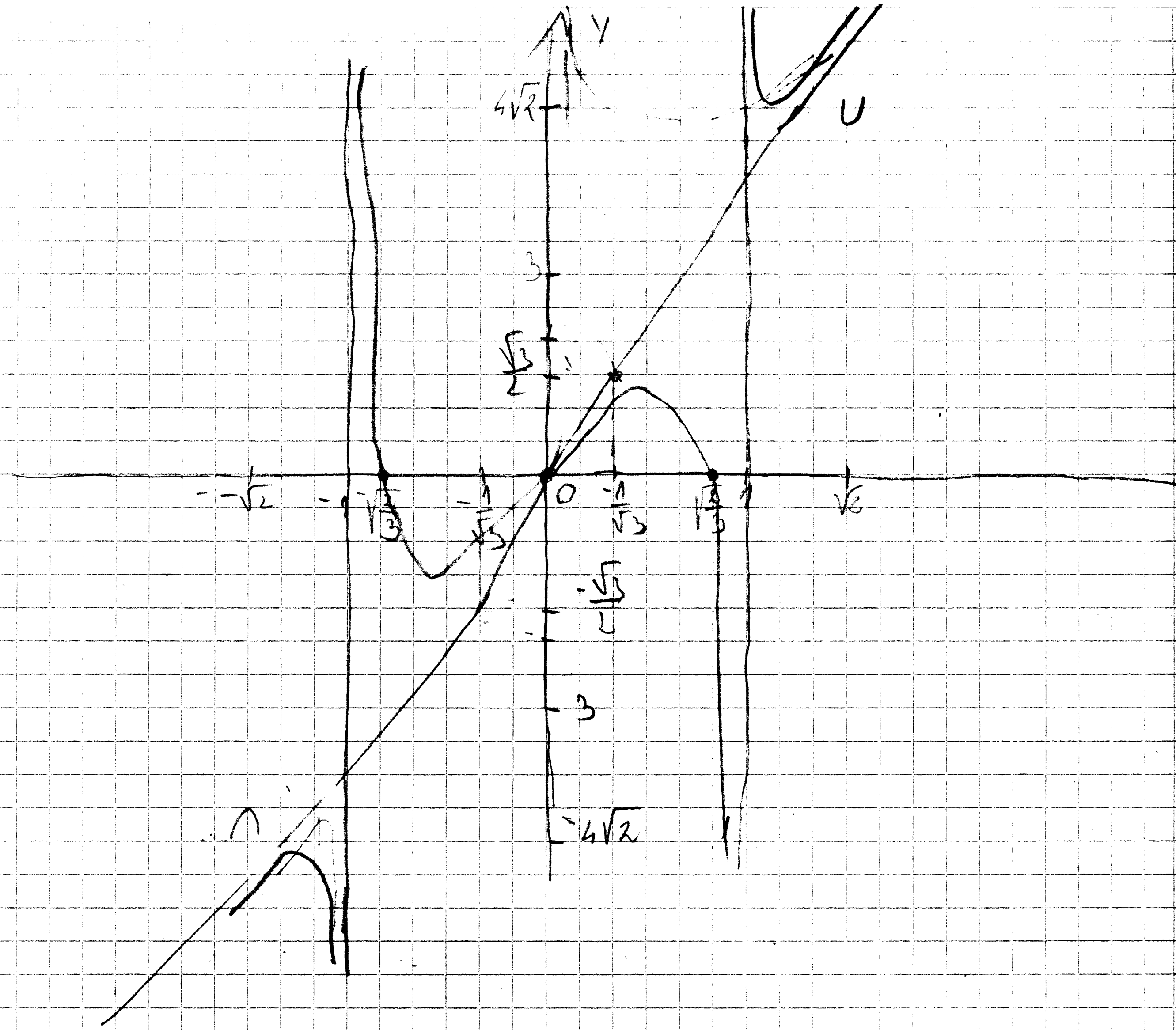
	$-\infty$ — -1	-1 — 0	0 — 1	1 — $+\infty$
x	−	− 0	+	+
$(x^2-1)^3$	+ 0	−	− 0	+
y''	−	+	−	+
y	∩	∪	∩	∪

N.D P.T N.D

↓

nije definisana

P(0,0) - prevojna tačka



y
$4\sqrt{2}$
3
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
1
O
$-\sqrt{2}$
-1
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$
1
$\sqrt{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
-3
$-4\sqrt{2}$

OSOBINE (PRAVILA) IZVODA

$C =$ constanta, $u = u(x)$, $v = v(x)$

1) $C' = 0$
2) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$
3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ZBIR ZBROJA, RAZLIKE
4) $(uv)' = u'v + uv'$
5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

TABLIČNI IZVODI

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in R)$

2) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $(a^x)' = a^x \ln a$ $(0 < a \neq 1)$

5) $(e^x)' = e^x$

6) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(0 < a \neq 1)$

7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

8) $(\sin x)' = \cos x$

9) $(\cos x)' = -\sin x$

10) $(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

11) $(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

12) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $(arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$

15) $(arcctg x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

16) $y = ch x \overset{def.}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (HIPERBOLIČKI KOSINUS)

$\Rightarrow y' = sh x$

17) $y = sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (SINUS HIPERBOLIČKI)

$\Rightarrow y' = ch x$

18) $y = th x = \frac{sh x}{ch x}$ (tangens hiperbolički)

$\Rightarrow y' = \frac{1}{ch^2 x}$

19) $y = cth x = \frac{ch x}{sh x}$ (KOTANGENS HIPERBOLIČKI)

$y' = -\frac{1}{sh^2 x}$